QUESITO 3

3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Tre palline sono estratte a caso, una alla volta senza reimbussolamento. Qual è la probabilità che

- **esattamente una pallina è rossa**
- **le tre palline sono di colori differenti**

Soluzione

A) Uso de i grafi ad albero e dei teoremi del Calcolo delle Probabilità

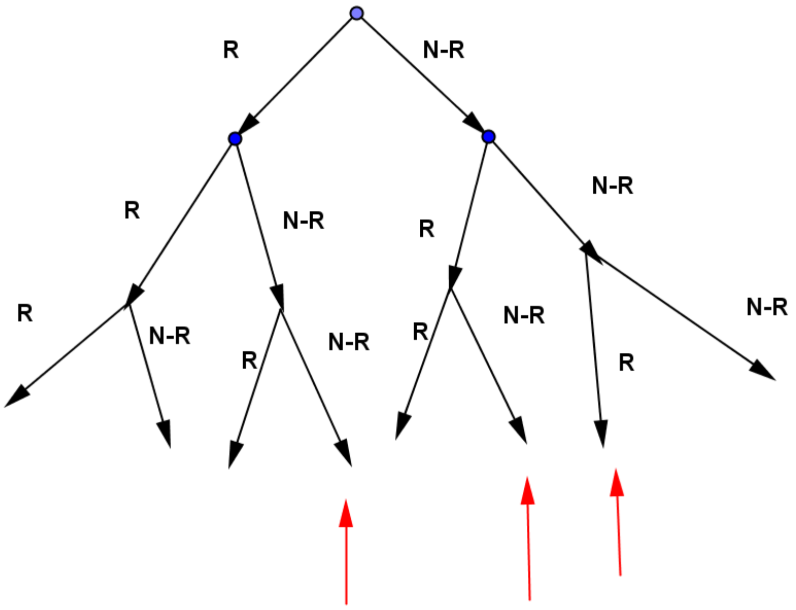
Si estraggono le 3 palline una dopo l'altra.

Primo caso.

Se ci concentriamo sulle 2 uscite $R = rosso\ e\ \bar{R} = N - R = non\ rosso$ la composizione dell'urna sarà

5 R - 15$\bar{R}$

abbiamo $2^3 = 8$ possibili esiti rappresentabili in un grafo ad albero



a) $3R \quad in\ 1\ sol\ modo$
b) $2\ R\ e\ 1\ \bar{R}$ in $C_{32} = C_{3,1}$ =3 modi diversi
c) $1\ R\ e\ 2\ \bar{R}$ in $C_{3,2} = C_{3,1}$ =3 modi diversi
d) $3\bar{R} \quad in\ un\ sol\ modo$

La domanda si riferisce al caso c) (nel grafo gli esiti sono evidenziati dalle frecce rosse)

la cui probabilità totale è $3\frac{5}{20}\frac{15}{19}\frac{14}{18}=\frac{35}{76}\cong 46\%$

Infatti

La probabilità dell'evento $R\bar{R}\bar{R}$ è

- $P(R)*P(\bar{R}\backslash R)*P(\bar{R}\backslash R\cap\bar{R}) \ =\frac{5}{20}\frac{15}{19}\frac{14}{18}$

In modo analogo si trova, per gli eventi $\bar{R}R\bar{R}$ e $\bar{R}\bar{R}R$ $\frac{15}{20}\frac{5}{19}\frac{14}{18}$ e $\frac{15}{20}\frac{14}{19}\frac{5}{18}$ rispettivamente

Secondo caso.

Se ci concentriamo sulle 4 uscite $R=rosso\ V=verde\quad G=giallo\quad B=bianco$ la composizione dell'urna sarà

5 R 5V 5G 5B

abbiamo $4^3=64$ possibili esiti

Poiché il grafo ad albero in questo caso è piuttosto laborioso, possiamo classificare gli esiti in base alle due modalità

stesso colore colore diverso

a) stesso colore $C_{4,1}$ =4 modi diversi
b) 2 dello stesso colore e una di colore diverso $C_{4,1}*C_{3,1}C_{3,1}$=4*3*3=36 modi
c) 3 colori diversi 4*3! = 24 modi diversi

- La domanda si riferisce all'evento d , la cui probabilità è uguale a $\frac{24*5^3}{20*19*18}=\frac{25}{57}\cong 44\%$

Infatti

Consideriamo per esempio l'evento RVG

La sua probabilità è uguale a $P(R)*P(V|R)*P(G\backslash R\cap V)=\frac{5}{20}\frac{5}{19}\frac{5}{18}$

In modo analogo si trova lo stesso risultato per gli altri 23 eventi.

B) **Soluzione mediante il Calcolo Combinatorio (definizione classica di Probabilità**)

Supponiamo di estrarre 3 palline tra le 20 dell'urna.

.I possibili esiti dell'estrazione sono tanti quante le Disposizioni $D_{20,3}$ (estrazioni successive senza reimbussolamento) ma anche quante sono le combinazioni $C_{20,3}$ (, i risultati non cambiano se si considera un'estrazione <<in blocco>> di tre palline, poiché si parla di esiti in cui l'ordine è irrilevante.

Primo caso

I casi favorevoli sono tanti quante le sequenze del tipo $R\bar{R}\bar{R}$, dove l'ordine è indifferente, ovvero i termini possono essere permutati in $\frac{3!}{2!}$ =3 modi diversi

3* $D_{5,1} * D_{15,2}$ (estrazioni successive) o $C_{5,1} * C_{15,2}$ (estrazione in blocco)

la probabilità che esca

- esattamente una pallina rossa $=3\frac{5*15*14}{20*19*18} = \frac{5*\frac{15*14}{2}}{\frac{20*19*18}{6}} = \frac{35}{76} \cong 46\%$

Secondo caso.

I casi favorevoli sono tanti quante le sequenze del tipo

RVG RV B RVG RGB

Poiché in ciascuna di esse l'ordine è indifferente , nel caso di estrazioni successive i termini devono essere permutati (in 3!=6 modi) e si ottengono 24 tipi di sequenze

In ognuna di esse ciascun termine si può presentare in 5 modi diversi

La probabilità che

- le tre palline sono di colori differenti $24\ \frac{5^3}{20*19*18}(estrazioni\ successive\ ) = \frac{4*5^3}{\frac{20*19*18}{6}}(\ estrazione\ in\ blocco) = \frac{25}{57} \cong 44\%$