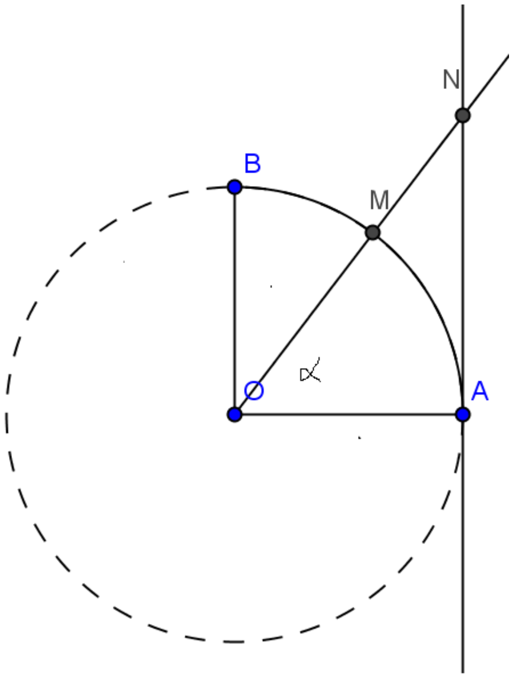
Problema 1



1. Indichiamo con r la misura del raggio della circonferenza cui appartiene l'arco AOB

Dal teorema della corda si deduce che $MA = 2\,\mathrm{r}\sin\frac{\alpha}{2}$

Dalla relazione tra cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo si deduce che $ON = \frac{r}{\cos\alpha}$

$Pertanto\ \ MN = ON - OM = \frac{r}{\cos\alpha} - r = r\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{MN}{MA} = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha * 2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Applicando alcune note formule goniometriche

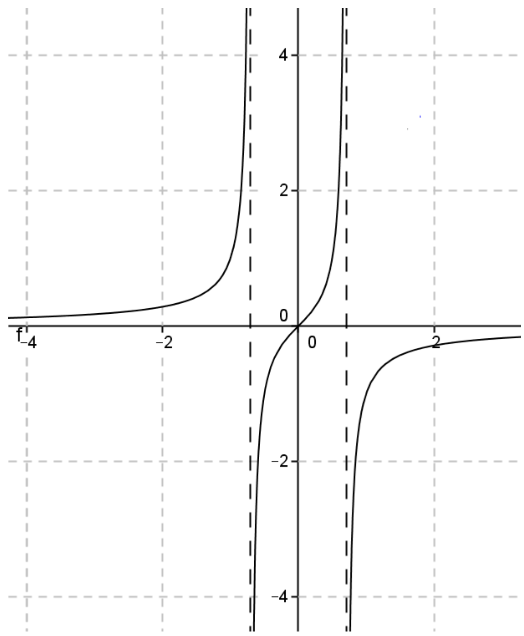
$$\frac{2sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}\right)2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1-sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Posto $\sin\frac{\alpha}{2} = x\ \ \ si\ iene\ f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$

2 . Prescindendo dalla questione geometrica f(x) è definita per $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

E' una funzione dispari, positiva per $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e per $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Negativa per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0\ e\ per\ x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



Poiché

$\lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\frac{\sqrt{2}}{2}^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

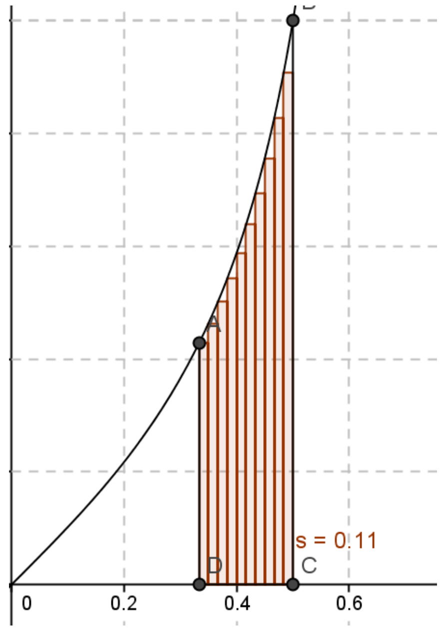
Le rette $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e p $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sono asintoti verticali

L'asse x è asintoto orizzontale

Studio della derivata prima e seconda

$f'(x) = \frac{2x^2+1}{(1-2x^2)^2} > 0 \quad \forall \ x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f(x)$ sempre crescente



$f''(x) = \frac{4x(2x^2+3)}{(1-2x^2)^2} = \ 0$ per x=0

O(0;0) è punto di flesso

Poiché f'(0)=1 la tangente inflessionale è y=x

La circonferenza richiesta ha equazione $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

4.L'area richiesta è uguale a

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-2x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln|1-2x^2|}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = -\,-\frac{1}{4}\,ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{9}} \ = -\frac{1}{4}\,ln\frac{9}{14} \ = \frac{1}{4}\,ln\frac{14}{9} \ \cong 0.11$$