Problema 2

1.

$$f(x) = \frac{1}{x log^2(x)}$$

È definita e positiva in $]0;1[\ \cup\ ]1;+\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Infatti il denominatore tende a 0 , come si può verificare applicando due volte la regola di De l'Hospital

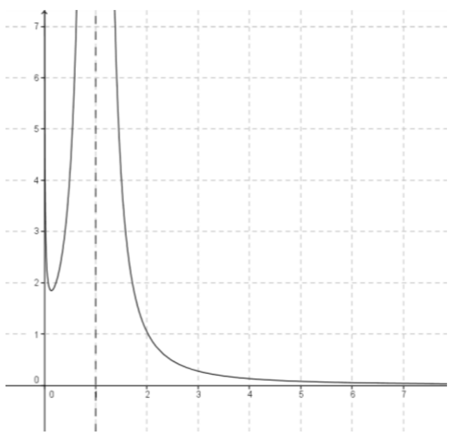
$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\log x * \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\log x}{-\frac{1}{x}}$ è ancora una forma di indecisione ma $\lim_{x \to 0^+} \frac{2\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

L'asse y e la retta x=1 sono **asintoti verticali** L'asse x è **asintoto orizzontale**.

$Studio\ della\ derivata\ prima$

$$f'(x) = -\frac{log(x) + 2}{x^2 log^3(x)} = 0 \ \ per\ x = e^{-2}$$



Segno di $f'(x)$

È positiva se $\frac{log(x)+2}{x^2 log^3(x)} < 0$

ovvero se $e^{-2} < x < 1$

crescenza e decrescenza del grafico

0-------------$e^{-2} + + + + + + + + 1 - - - - -$

Minimo relativo $\left(e^{-2}; \frac{e^2}{4}\right)$

$Studio\ della\ derivata\ seconda$

$$f''(x) = 2\frac{log^2(x) + 3\log x + 3}{x^3 log^4(x)}$$

Non ha zeri reali ed è sempre positiva nel dominio

La curva γ volge sempre la concavità verso l'alto

2. Il punto A $ha\ coordinate\ (e; f(e))\ ovvero\ \left(e; \frac{1}{e}\right)$

Il coefficiente angolare della tangente è uguale a $f'(e) = -\frac{3}{e^2}$

L'equazione della tangente a γ nel punto richiesto è

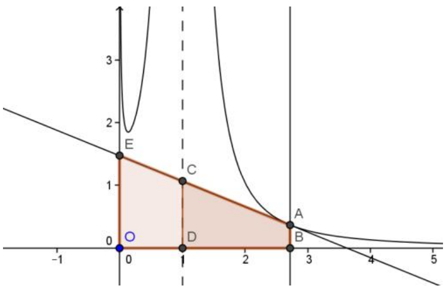
Soluzione di Adriana Lanza

$$y-\frac{1}{e}=-\frac{3}{e^2}(x-e)\rightarrow y=-\frac{3}{e^2}\,x+\frac{4}{e}$$

La suddetta tangente incontra l'asse y nel punto $E\left(0;\frac{4}{e}\right)$ e la retta x=1 nel punto $C(1;\frac{4e-3}{e^2})$

La formulazione della richiesta è equivoca poiché gli asintoti verticali sono due.

Il trapezio ABOE ha area $\frac{5}{2}$ mentre l trapezio ABDC ha area uguale a $\frac{\frac{1}{e}+\frac{4e-3}{e^2}}{2}*(e-1)=\frac{5e^2-8e+3}{2e^2}$



3. $S_k=\int_e^k\frac{1}{x\log^2(x)}\,dx=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_e^k=1-\frac{1}{\log k}$

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\log k}\right)=1$

L'area del trapezio ABOE è 2.5

L'area del trapezio ABDC, approssimata alla quarta cifra decimale è pari a 1.2315

$$\frac{1}{1.2315}\cong 81\%$$

Soluzione di Adriana Lanza