PROBLEMA 2

1. **Si studi tale funzione**
$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

2. Si dimostri che l'equazione$x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$
ha, sull'intervallo 1< *x* < 2 , un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ , si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.
3. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse *x* e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse *y* .
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ , dall'asse *x* e dalla retta di equazione x=2

Soluzione

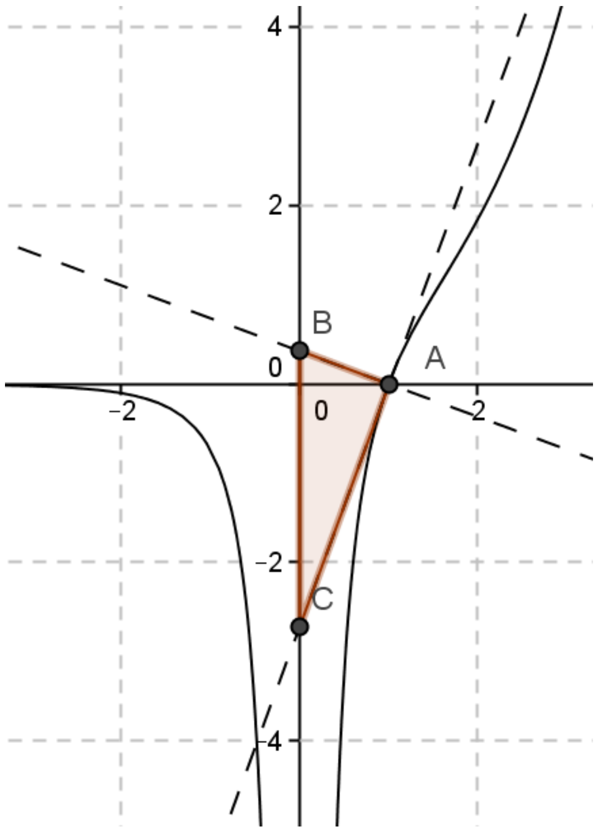
1. $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ è definita per x≠ 0 , positiva per x>1 e negativa per x<1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

L'ultimo risultato si evince dalla proprietà della funzione esponenziale che, per x tendente a $+\infty$, è un infinito maggiore di qualunque potenza di x. Per lo stesso motivo possiamo affermare che non c'è asintoto obliquo.

La curva è invece asintotica all'asse x e al semiasse delle y negative.

Segno di $f'(x) = \frac{e^x(x^2-2x\prime 2)}{x^3}$ negativa per x<0 (f(x) decrescente) e positiva per x>0 (f(x) crescente)



2. La funzione $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 6$ è continua, derivabile e monotona crescente in quanto la sua derivata $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6$ è sempre positiva.
Poiché $h(1) = -2$ e $h(2) = 2$, per il teorema di esistenza degli zeri ammette uno zero reale (e uno solo), compreso tra 1 e 2
Calcolo del valore approssimato con il metodo dicotomico

a	b	F(a)	F(b)	F(a)*F(b)	xmedio	F(xmedio)
1	2	-2	2	-4	1,5	-0,375
1,5	2	-0,375	2	-0,75	1,75	0,671875
1,5	1,75	-0,375	0,671875	-0,25195	1,625	0,119141
1,5	1,625	-0,375	0,119141	-0,04468	1,5625	-0,13452
1,5625	1,625	-0,13452	0,119141	-0,01603	1,59375	-0,00943
1,59375	1,625	-0,00943	0,119141	-0,00112	1,609375	0,054409
1,59375	1,609375	-0,00943	0,054409	-0,00051	1,601563	0,022379
1,59375	1,601563	-0,00943	0,022379	-0,00021	1,597656	0,006447
1,59375	1,597656	-0,00943	0,006447	-6,1E-05	1,595703	-0,0015
1,595703	1,597656	-0,0015	0,006447	-9,7E-06	1,59668	0,002473

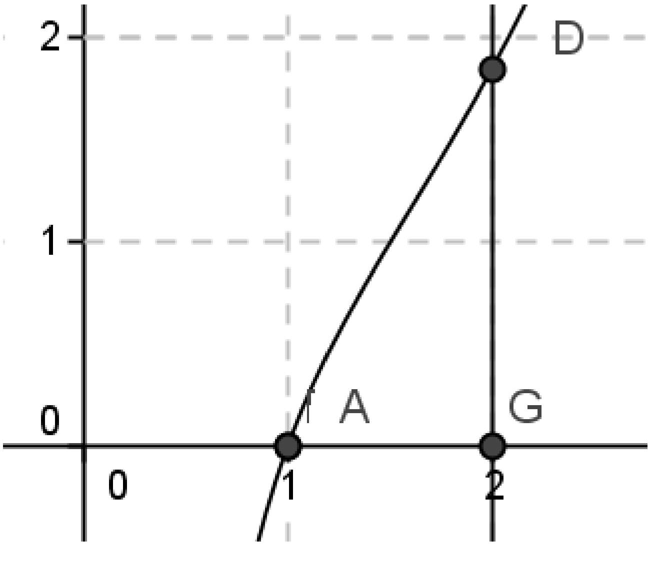
$\xi \cong \mathbf{1.59}$

Essendo $f''(x) = \frac{e^x}{x^4}(x^3 - 3x^2 + 6x + 6\ )$ ξ è proprio l'ascissa del punto di flesso

Un valore approssimato dell'ordinata è **1.14**

3. La tangente nel punto A(1;0) ha equazione $y\ = e(x-1)$, la normale ha equazione
$y = -\frac{1}{e}\ (x-1)$
Il triangolo richiesto ha per vertici
A(1;0) B(0; $\frac{1}{e}$) C(0;-e)
L'area è uguale a $\frac{e+\frac{1}{e}}{2} \cong 1.54$

4. L'area del triangolo mistilineo AGD è uguale a



$\int_1^2 f(x)\, dx$

Per determinare una primitiva di f(x) applichiamo il metodo di integrazione per parti, considerando $\frac{1}{x^2}dx$ come fattore

Soluzione di Adriana Lanza

differenziale

$$\int \frac{\boldsymbol{e^x(x-1)}}{\boldsymbol{x^2}}\ \mathbf{dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\boldsymbol{e^x(x-1)} + \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{xe^x dx} =$$

$$\frac{1}{x}e^x - e^x + e^x = \frac{1}{x}e^x$$

$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e \cong 0.98$