

Quesito7

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato

dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

e dall'asse delle x nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$

Soluzione

La funzione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ è la funzione di distribuzione normale standardizzata con media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$.

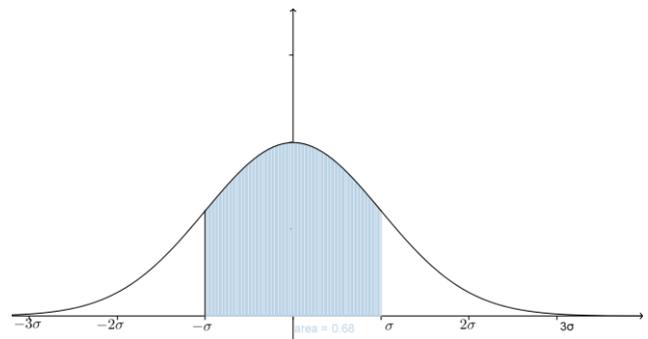
Il grafico è una gaussiana simmetrica rispetto all'asse y e avente i due flessi nei punti di ascissa $x=-1$ e $x=1$

L'integrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ fornisce l'area sottesa dalla gaussiana ed è uguale a 1 in quanto rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria assuma un valore reale

$$\text{L'integrale } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

rappresenta invece la probabilità che un valore di una variabile aleatoria, distribuita normalmente, sia compreso tra $-\sigma$ e σ

Le tavole statistiche forniscono un valore di circa 68%, pertanto l'area richiesta deve avere un valore di 0.68 circa, essendo uguale al 68% dell'area complessiva.



Metodo dei trapezi

L'intervallo $[a, b]$ viene diviso in n intervalli di ampiezza h , dove $x_0 = a$ e $x_n = b$.

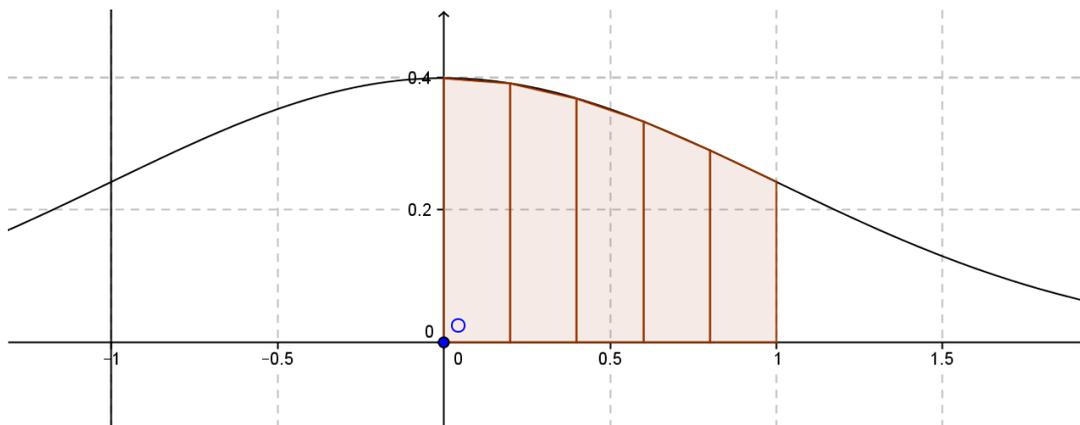
In corrispondenza, come indicato in figura, è possibile costruire n trapezi la cui area complessiva fornisce un valore approssimato per l'area richiesta.

Possiamo porre:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Data la simmetria della curva possiamo limitarci all'intervallo $[0,1]$ e poi raddoppiare il risultato

Quesito 7 –Suppletiva 2014- PNI-Brocca-Autonomia



Poiché la curva volge la concavità verso il basso la somma dei trapezi fornirà un valore approssimato per difetto

a	b	passo
	0	1
		0,20
x	f(x)	addendi
0	0,40	0,20
0,20	0,39	0,39
0,40	0,37	0,37
0,60	0,33	0,33
0,80	0,29	0,29
1,00	0,24	0,12
	somma addendi	1,70
	somma trapezi	0,34

Il valore dell'area richiesta è quindi $2 * 0.34$ quindi 0.68 circa