

Quesito 2.

La funzione $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$ è evidentemente continua nel punto $x=0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

Soluzione

Mentre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt[3]{x} = 0 = f(0)$, il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{0+h} - \sin \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h} \sqrt[3]{h^2}} = +\infty \quad \text{essendo} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h}} = 1$$

Il grafico della funzione e della sua derivata:

