Quesito 8

Si calcoli il limite della funzione $\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{\log \sin 2x}$ quando tende a $\frac{\pi}{4}$

Soluzione

Al tendere di x a $\frac{\pi}{4}$sia la funzione che sta al numeratore, sia quella che sta al denominatore della

frazione ,tendono a $\mathbf{0}$ si trova pertanto una forma d'indecisione del tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **.**

La funzione $\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{\log \sin 2x}$ è il rapporto di due funzioni continue e derivabili in un intorno di $\frac{\pi}{4}$

Nello stesso intorno la derivata della funzione che sta al denominatore non è mai nulla

Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del Teorema di De l'Hospital.

Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}$ dà luogo ancora ad una forma d'indecisione del tipo $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ che però può essere facilmente eliminata trasformando opportunamente la funzione che sta al denominatore

$$\frac{\cos x-\sin x}{2\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{2\,\frac{cos^2 x-sin^2 x}{2\sin x\cos x}}=\frac{(\cos x-\sin x)\sin x\ \cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\sin x\ \cos x}{(\cos x+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\ \cos x}{(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$