8. Si dica se è possibile che sia :

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

SOLUZIONE

L'uguaglianza è verificata se n=k, infatti

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Anche se questa osservazione risponde al quesito in modo esauriente, è interessante approfondire l'argomento

Interpretando $\binom{n}{k} e \binom{n+1}{k+1}$ **come coefficienti binomiali**, quindi elementi del triangolo di Pascal (o di Tartaglia), l'uguaglianza è verificata quando il termine che si trova al k-esimo posto dell' n-sima riga è uguale a quello che occupa il posto successivo nella riga successiva.

Questo accade solo per gli ultimi termini di ciascuna riga, cioè se n=k.

Infatti, dovendo essere anche $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, il secondo addendo deve essere nullo.

Significato combinatorio

Sia A un insieme composto da n elementi e $\binom{n}{k}$ il numero dei suoi sottoinsiemi formati da $k \leq n$ elementi.

Se n = 0 anche k deve essere uguale a 0 → $\binom{n}{k} = 1$ poiché l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto

Ma anche $\binom{n+1}{k+1}$ =$\binom{1}{1} = 1$ e quindi l'uguaglianza è verificata

$(\, aggiungendo\;\; 1\;\; elemento\ si\ può\ costituire\ un\ solo\ sottoinsieme\ costituito\ da\ un\ solo\ elemento)$

Se $n \neq 0$, indichiamo con $a_1, a_2 . a_3 \ldots \ldots . . a_n$ gli elementi di A e supponiamo di costituire con essi $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di cardinalità k.

Aggiungiamo un altro elemento a_{n+1} e formiamo $\binom{n+1}{k+1}$ sottoinsiemi di cardinalità k+1.

Per fare questo possiamo innanzi tutto aggiungere a_{n+1} agli $\binom{n}{k}$ gruppi già costituiti e poi raggruppare i primi n elementi in sottoinsiemi di cardinalità k+1 , il cui numero sarà $\binom{n}{k+1}$

Esempio n=3 e k =2

$a_1, a_2 \quad a_1 a_3 \quad a_2 a_3$ sono i 3= $\binom{3}{2}$ sottoinsiemi costituiti da 2 elementi

Aggiungedo un quarto elemento

$a_1 a_2 a_4 \quad a_1 a_3 a_4 \quad a_2 a_3 a_4 \quad a_1 a_2 a_3$ sono i $4 = \binom{4}{3}$ sottoinsiemi costituiti da 3 elementi

Ritroviamo pertanto che $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ e che in generale $\binom{n+1}{k+1} \geq \binom{n}{k}$

Il segno uguale vale solo se la seconda categoria di raggruppamenti non può essere costituita cioè se n=k.