PROBLEMA 1 -Suppletiva

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate (-4, 0), (4, 0), (-4, 25) e (4, 25); nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$, $x \in [-4, 4]$*, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione* $y = \frac{100}{4+x^2}$ *e le rette* $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

1. Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano Oxy. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

2. Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

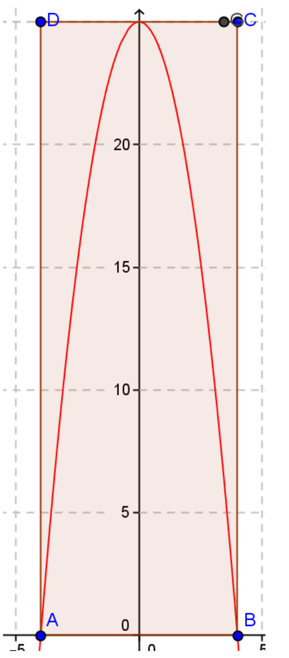
   Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}, 0]$ *che per* $x \in [0, 2\sqrt{3}]$ *la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione* $f(x) = |x| + 1$*; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste*.

3. Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}, 0]$.
   Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxyz, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.
4. Determina l'equazione del piano prescelto.

Soluzione

Il rettangolo entro cui deve essere costruita la pista ha area uguale a $8 \cdot 25 = 200\ m^2$.

Osservazione:



Le due soluzioni sono:

a)un segmento parabolico

b) una regione piana il cui contorno è un arco di cubica e una spezzata

Il contorno di ciascuna regione non può essere considerata una funzione, pertanto le due funzioni di cui parla il testo sono probabilmente quelle corrispondenti all'espressione analitica della parabola e della cubica, nell'intervallo in cui sono considerate.

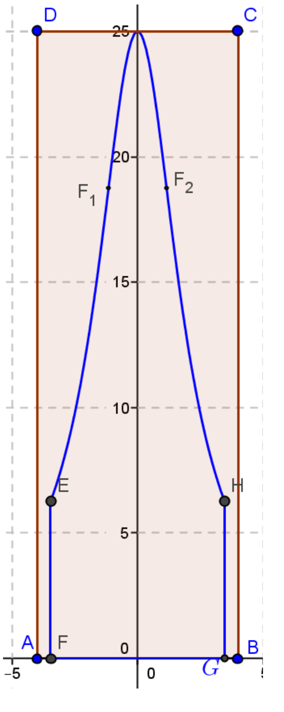
La richiesta dell'analisi di eventuali punti angolosi fa pensare invece allo studio di eventuali singolarità relative alla retta tangente al contorno delle due regioni piane.

a)La curva di equazione $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ è una parabola simmetrica rispetto all'asse y e avente il vertice nel punto di coordinate (0;25) che corrisponde al punto di massimo.

Il segmento parabolico intercettato dall'asse x è inscritto nel rettangolo all'interno del quale deve essere costruita pista.
Anche se il testo non lo richiede, possiamo osservare che l'area del semento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ $\cong 0{,}66$ dell'area del rettangolo circoscritto (teorema di Archimede) quindi supera di poco i vincoli urbanistici.

La parabola non ha flessi né punti angolosi; gli estremi A e B sono caratterizzati dalla presenza di due tangenti al contorno della regione piana

b) La curva di equazione y $= \frac{100}{4+x^2}$ corrisponde alla versiera di Gaetana Agnesi , di equazione, y $= \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ con a=1, dilatata di un fattore $\frac{25}{2}$ lungo la direzione dell'asse y.



La curva è simmetrica rispetto all'asse y e assume solo valori positivi

Poiché $\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{4+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{100}{4+x^2} = o$ l'asse x è asintoto orizzontale

Poiché $y'(x) = -\frac{200x}{(4+x^2)^2}$ la curva è crescente per x<0 , decrescente per x>0, Il punto di coordinate (0;25) è punto di massimo relativo e assoluto.

La derivata seconda $y''(x) = -200\frac{(4+x^2)^2-4x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} = -200\frac{4-3x^2}{(4+x^2)^3}$ si annulla per $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$,

è positiva per $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\cup\, x > +\frac{2}{3}\sqrt{3}$, è negativa per $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

La curva volge la concavità verso l'alto per $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\cup\, x > +\frac{2}{3}\sqrt{3}$, volge la concavità verso il basso per $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Soluzione di Adriana Lanza

I punti $F_1\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\ ;\frac{75}{4}\right)$ e $F_2\left(+\frac{2}{3}\sqrt{3}\ ;\frac{75}{4}\right)$ sono flessi.

I punti di incontro con le rette di equazione $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.*sono, rispettivamente*

$E(-2\sqrt{3};\frac{25}{4})$ $\qquad$ $H(2\sqrt{3};\frac{25}{4})$

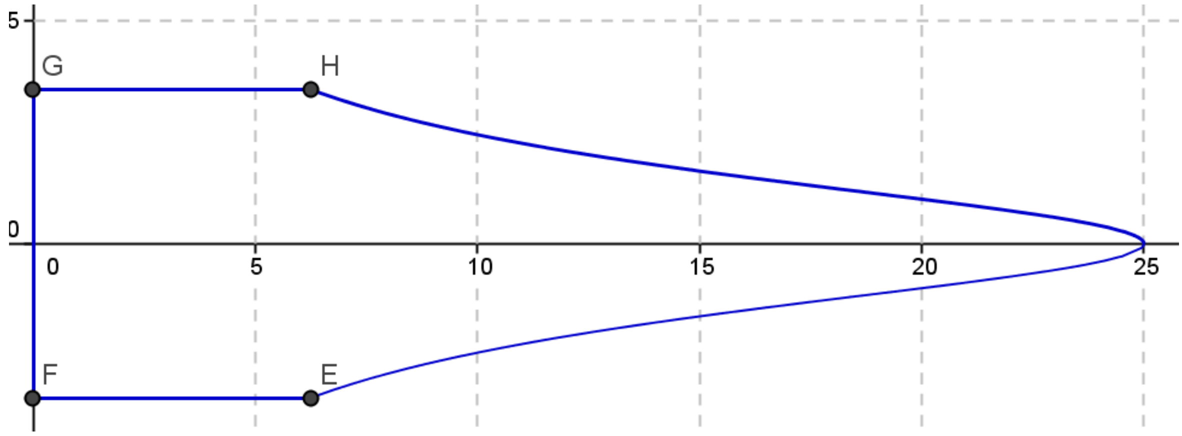
Il profilo della pista è costituito dall'arco EH di curva e dai segmenti , EF,FG,GH,

Per i punti F e G valgono le stesse considerazioni relative ai punti A e B della prima soluzione.

Per i punti E e H, osserviamo che , se esplicitiamo la variabile x in funzione di y il profilo FEHG può essere rappresentato dalla funzione

$$x(y) = \begin{cases} 2\sqrt{3} & 0 \le y < \dfrac{25}{4} \\ 2\sqrt{\dfrac{25-y}{y}} & \dfrac{25}{4} < y \le 25 \end{cases}$$

e dalla sua simmetrica rispetto all'asse y



I punti H ed E , in questo caso, sono due punti angolosi.

$$x'(y) = \begin{cases} 0 & 0 \le y < \dfrac{25}{4} \\ \dfrac{25\sqrt{\dfrac{25-y}{y}}}{y(y-25)} & \dfrac{25}{4} < y \le 25 \end{cases}$$

In H la derivata sinistra è uguale a 0 e la derivata destra è uguale a $-\frac{16}{75}\sqrt{3}$

Analogamente, in E la derivata sinistra è uguale a 0 e la derivata destra è uguale a $+\frac{16}{75}\sqrt{3}$

Soluzione di Adriana Lanza

2. L'area occupata dalla pista è $2\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}\, dx = 2\left\{50\tan^{-1}\frac{x}{2}\right\}_0^{2\sqrt{3}} = 100\frac{\pi}{3} \cong 104{,}72m^2$

Il rapporto con l'area del rettangolo ABCD è $\frac{104{,}72}{200}$ $\cong 52\%$ quindi i limiti urbanistici sono rispettati

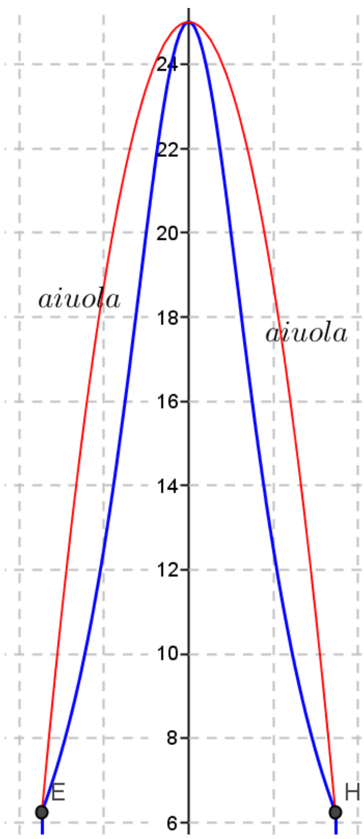
3.Il volume di ciascuna aiuola è il volume di un solido avente per base una delle due regioni di piano, rappresentate in figura, limitate dalla parabola e dalla cubica.;

le sezioni con un piano perpendicolare all'asse x sono rettangoli di base $\left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right)$ e altezza $|x| + 1$

In particolare il volume richiesto può essere calcolato mediante l'integrale

$\int_{-2\sqrt{3}}^{0}\left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right) \cdot (|x| + 1)dx$

Poiché nell'intervallo considerato $|x| = -x$ determiniamo l'integrale indefinito



$$\int\left(+\frac{25}{16}x^3 - 25x + \frac{100x}{4+x^2} - \frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right)dx$$

$\frac{25}{64}x^4 - \frac{25}{48}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 25x + 50\ln(4+x^2) - 50\tan^{-1}\frac{x}{2} + c \rightarrow$

$\int_{-2\sqrt{3}}^{0}\left(-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right) \cdot (|x| + 1)dx =$

$$= \left[\frac{25}{64}x^4 - \frac{25}{48}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 25x + 50\ln(4+x^2) - 50\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{0}$$

$= 100\ln 2 - 200\ln 2 - \frac{25}{64}144 - \frac{25}{48}24\sqrt{3} + \frac{25}{2}12 + 50\sqrt{3} - 50\tan^{-1}\sqrt{3}$

$= -100\ln 2 - 50\frac{\pi}{3} + \frac{75}{2}\sqrt{3} + \frac{375}{4} \cong 37{,}03$

Per riempire l'aiuola sono necessari $circa$ $37,03$ metri cubi di terreno vegetale

4. Sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione di un piano generico.
Imponendo il passaggio per i punti (-4;0;5) (4;0;5) (0;25;4) si trova

$$\begin{cases} -4a + 5c + d = 0 \\ 4a + 5c + d = 0 \\ 25b + 4c + d = 0 \end{cases}$$

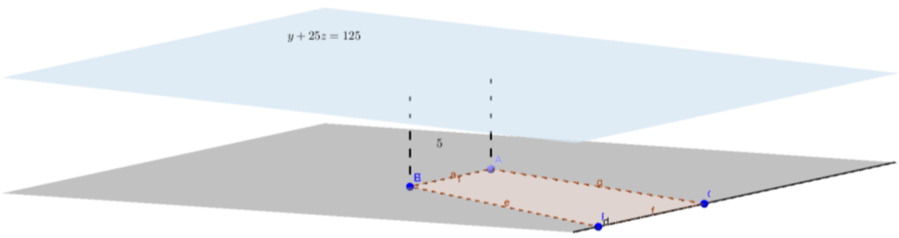
sottraendo la seconda dalla prima equazione si trova $a = 0$

Soluzione di Adriana Lanza

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{d = -5c} \\ \boldsymbol{25b + 4c - 5c = 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{d = -5c} \\ \boldsymbol{c = 25b} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{ponendo\ b = 1} \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{b = 1} \\ \boldsymbol{c = 25} \\ \boldsymbol{d = -125} \end{cases}$$

Equazione del piano

$$y + 25z - 125 = 0$$



Soluzione di Adriana Lanza