PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti t = 0 e t = 10 (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14, 13)$ e $P_2\,(12, 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12, -2)$ e $Q_2(11, -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in Figura 1 (non in scala). L'area indicata con ZMP è una “Zona Marittima Pericolosa”. Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate (0, 1) spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi Figura 1).

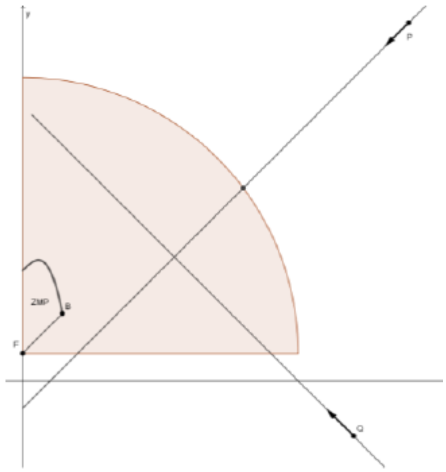


Figura 1

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.
4. Nel punto $B(X_B, Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da: $f(x) = -x^3 + x + 4, x \in \Re, 0 \leq x \leq x_B$ $g(x) = x + 1, x \in \Re, 0 \leq x \leq x_B$ e dalla retta x = 0.
   Calcola l'area della ZMP

Soluzione

1. **Traiettorie**

   Determiniamo le equazioni delle due rette su cui si muove ciascuna nave.

Equazioni parametriche della traiettoria della prima nave

$$P(t)\begin{cases} x = & x_0 + v_x\, t \\ y = & y_0 + v_y t \end{cases}$$

Imponendo che nell'istante $t = 0$ la nave si trova nel punto $P_1\,(14; 13)$ e nell'istante t=10 nel punto $P_2(12;11)$

$$\begin{cases} 14 = & x_0 \\ 13 = & y_0 \\ 12 = & x_0 + 10v_x \\ 11 = & y_0 + 10v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = & 14 \\ y_0 = & 13 \\ v_x = & -\frac{1}{5} \\ v_y = & -\frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow P(t)\begin{cases} x = & 14 - \frac{1}{5}\,t \\ y = & 13 - \frac{1}{5}t \end{cases} \rightarrow$$ eliminando il parametro t si ottiene

l'equazione della traiettoria: $y = x - 1$

Allo stesso risultato si perviene scrivendo l'equazione della retta per i due punti $P_1(14; 13)$ e $P_2(12; 11)$

$$\frac{x-12}{2} = \frac{y-11}{2} \quad \rightarrow y = x - 1$$

Analogamente , per la seconda nave

$$\begin{cases} 12 = & x_0 \\ -2 = & y_0 \\ 11 = & x_0 + 10v_x \\ -1 = & y_0 + 10v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = & 12 \\ y_0 = & -2 \\ v_x = & -\frac{1}{10} \\ v_y = & +\frac{1}{10} \end{cases} \rightarrow$$

$Q(t)\begin{cases} x = & 12 - \frac{1}{10}\,t \\ y = & -2 + \frac{1}{10}t \end{cases}$ eliminando il parametro t si ottiene l'equazione della traiettoria

$$x + y = 10$$

che corrisponde alla retta passante per $Q_1(12;-2)$ e $Q_2(11-1)$

$$\frac{x-11}{1} = \frac{y+1}{-1} \rightarrow y = -x + 1$$

$Traiettoria\ della\ nave\ P:\ P(t)\begin{cases} x = & 14 - \frac{1}{5}\,t \\ y = & 13 - \frac{1}{5}t \end{cases} \rightarrow$	$y = x - 1$
$Traiettoria\ della\ nave\ Q:\ \ Q(t)\begin{cases} x = & 12 - \frac{1}{10}\,t \\ y = & -2 + \frac{1}{10}t \end{cases}$	$y = -x + 10$

Distanza minima dal faro

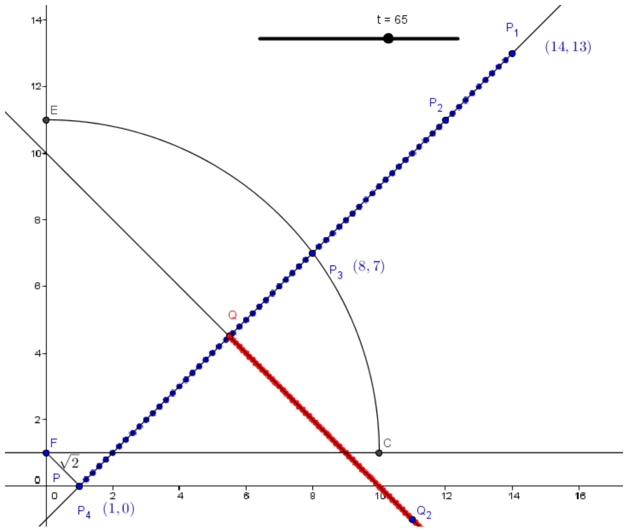
Primo metodo

La distanza $\overline{PF}$ in funzione di t è

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}\,t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t - 1\right)^2}$$

Essendo una funzione sempre positiva, il suo minimo corrisponde al minimo di $\overline{PF}^2$
Il radicando è una funzione quadratica il cui grafico è una parabola con la concavità verso l'alto e il cui punto di minimo è il vertice.
Annullando la derivata prima si trova

$$14 - \frac{1}{5}\,t + 12 - \frac{1}{5}t = 0 \rightarrow \frac{1}{5}t = 13 \rightarrow t = 65$$



Pertanto

$\overline{PF}_{minimo} = \sqrt{(14-13)^2 + (13-13-1)^2}$
$= \sqrt{2}$

Secondo metodo

La generica posizione della nave P, in funzione di x, è $P(x, x-1)$
La distanza da F è

$$\overline{PF} = \sqrt{(x)^2 + (x-1-1)^2}$$

La distanza minima si ha per

2x-2(x-2)=0 $\rightarrow x = 1 \rightarrow \quad P_4(1;0) \rightarrow \overline{P_4F} = \sqrt{2}$

OSSERVAZIONE
La distanza PF è minima quando il segmento PF è perpendicolare alla traiettoria, cioè è uguale alla distanza tra il punto F (0;1) e la retta di equazione $y - x + 1 = 0$

$$\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

La posizione $P_3(8{,}7)$ in cui P avvista il faro si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 100 \\ y = x - 1 \end{cases} \rightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \rightarrow (x+6)(x-8) = 0$$

Le due soluzioni sono
x=-6 $\rightarrow y = -7$
x=8$\rightarrow y = 7$

Poiché P si muove nel verso delle x e delle y decrescenti, (8;7) rappresenta la posizione in cui P avvista il faro la prima volta.

La posizione P_3 corrisponde al valore del tempo t_3

$$P_3 \begin{cases} 8 = 14 - \frac{1}{5}\,t_3 \\ 7 = 13 - \frac{1}{5}t_3 \end{cases} \rightarrow t_3 = 30$$

La posizione P_4 corrisponde al valore del tempo t_4

$$P_4 \begin{cases} 1 = 14 - \frac{1}{5}\,t_4 \\ 0 = 13 - \frac{1}{5}t_4 \end{cases} \rightarrow t_4 = 65$$

Intervallo di tempo trascorso tra l'istante in cui P avvista il faro e l'istante in cui la loro distanza è minima

$$\Delta t = t_4 - t_3 = 65 - 30 = 35 minuti$$

Soluzione di Adriana Lanza

Allo stesso risultato si perviene mediante la proporzione, valida per un moto uniforme

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{10} = \frac{\overline{P_3P_4}}{\Delta t} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{70}{2} = 35$$

La nave P raggiunge la minima distanza dal faro F dopo 35 minuti dall'istante in cui lo avvista la prima volta, e la misura di tale distanza è circa 1,41 miglia.

2 .

La distanza tra le due navi , al generico tempo t, è

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2}$$

Imponendo

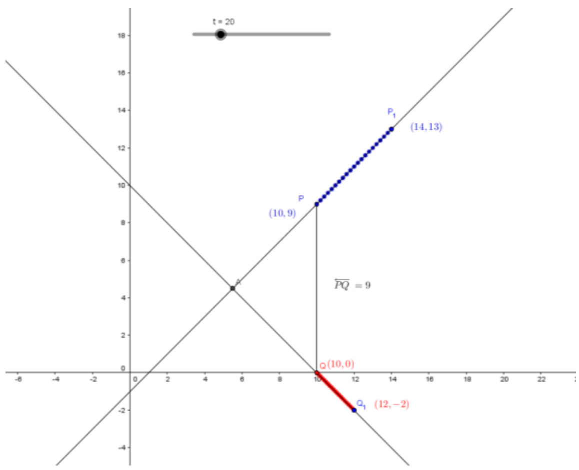
$$\sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2} = 9 \rightarrow 229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2 = 81 \rightarrow t^2 - 94t + 1480 = 0$$

Le soluzioni sono $(in\quad minuti)$

$$t = 47 \pm \sqrt{729} \rightarrow \quad t = 74 \quad \cup \quad t = 20$$

La posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è di 9 miglia, corrisponde a t=20, per cui

$$P(20)\begin{cases} x = & 14 - \frac{1}{5}\,20 \\ y = & 13 - \frac{1}{5}20 \end{cases} \rightarrow P(20)\begin{cases} x = & 10 \\ y = & 9 \end{cases}$$



3. Riprendiamo l'espressione della distanza PQ in funzione di t

$$\overline{PQ} = D(t) = \sqrt{229 - \frac{94}{10}t + \frac{1}{10}t^2}$$

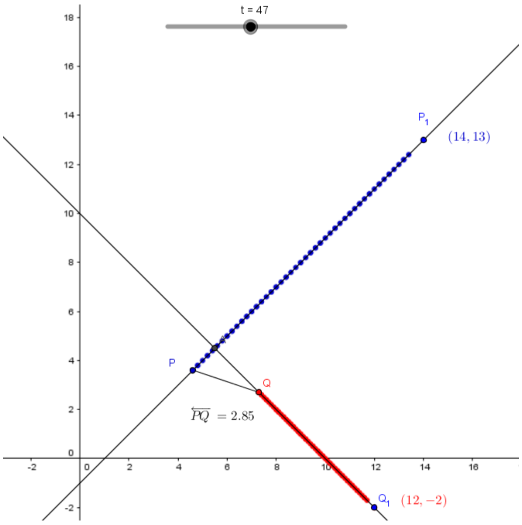
Poiché è sempre positiva D(t) assume il valore minimo quando è minimo il suo quadrato

La funzione Y =229 $-\frac{94}{10}t+\frac{1}{10}t^2$ ha per grafico una parabola con la concavità verso l'alto che assume il valore minimo in corrispondenza del vertice

$$V\left(47;\frac{81}{10}\right)$$

$D(t)\ minima=\frac{9}{10}\sqrt{10}\cong 2{,}85\ miglia$

la distanza tra le due navi è minima all'istante $t = 47$ e il valore di tale distanza è di circa $2{,}85\ miglia$.



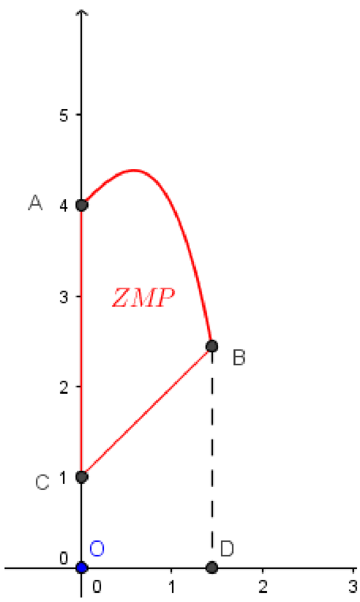
4. Determiniamo le coordinate del punto B risolvendo il sistema $\begin{cases} y = -x^3 + x + 4, \\ y = x+1 \end{cases}$

sottraendo membro a membro si trova $0=-x^3+3 \rightarrow x=\sqrt[3]{3}$

$B(\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}+1)$

L'area della zona ZMP è uguale a

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}}(-x^3 + x + 4 - x - 1)dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}}(-x^3+3)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}+3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}} =$$



$$=-\frac{3\sqrt[3]{3}}{4}+3\sqrt[3]{3}=\frac{9}{4}\sqrt[3]{3}\cong 3{,}25\ mi^2$$

Soluzione di Adriana Lanza