PROBLEMA 2. -Americhe

Sia f la funzione definita da $f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione;

2. Dimostra che la funzione $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g;

3. Detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g;

4. Sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$,con $a \in \Re - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo.
Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

Soluzione

1. La funzione $f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ è continua in $\Re$, e ammette derivata prima

$$f'(x) = 4 \cdot e^{2x} + 8x \cdot e^{2x} - 4 \cdot e^{2x} = 8x \cdot e^{2x}$$

e derivata seconda uguale a

$$f''(x) = 8 \cdot e^{2x} + 16x \cdot e^{2x} = 8 \cdot e^{2x}(1 + 2x)$$

Il punto di minimo

L a derivata prima ammette un unico zero, x=0, e poiché $f''(0)$= 8>0 , si tratta di un punto di minimo relativo.

Le sue coordinate sono $(0, -2)$

Si può verificare che si tratta anche di minimo assoluto , in quanto

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = = 0$

Il secondo limite si presenta nella forma di indecisione $\infty \cdot 0$ riconducibile alla forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{(4x - 2)}{e^{-2x}}$$

Applicando la regola di De L'H$\hat{o}$pital , poiché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{4}{-2 \cdot e^{-2x}} = 0 \to \lim_{x \to -\infty} (4x - 2) \cdot e^{2x} = 0$$

Il punto di flesso

La derivata seconda ammette un unico zero, $x = -\frac{1}{2}$, è positiva per $x > -\frac{1}{2}$, negativa per $x < -\frac{1}{2}$, .

Il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x > -\frac{1}{2}$, verso il basso per $x < -\frac{1}{2}$.

Il punto $F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$ è l'unico punto di flesso.

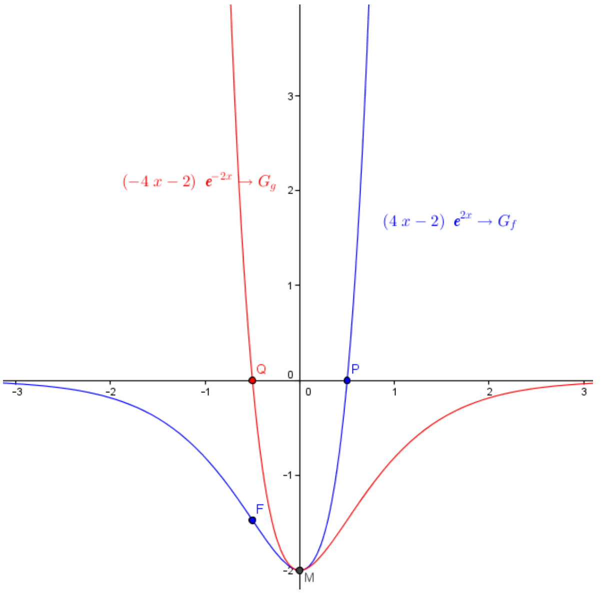
Il grafico G_f

Aggiungiamo alle informazioni già lo studio del segno della funzione.

Osserviamo che $f(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}$, è positiva per $x > \frac{1}{2}$, negativa per $x < \frac{1}{2}$.

Soluzione di Adriana Lanza

Il grafico, in blu, è nella figura a lato, assieme al grafico della curva simmetrica rispetto all'asse y (in rosso)



2. **La funzione simmetrica rispetto all'asse y**

la funzione $g(x) = (-4x-2) \cdot e^{-2x}$ si ottiene applicando a f(x) la trasformazione

$$\begin{cases} x = & -x' \\ y = & y' \end{cases}$$

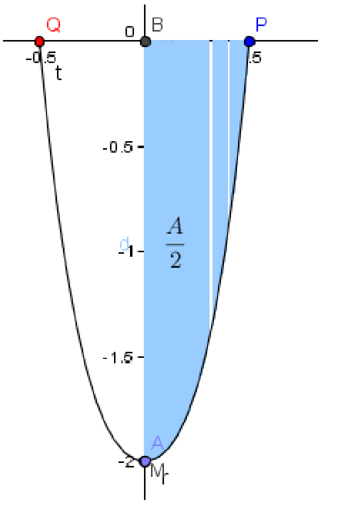
che rappresenta la simmetria rispetto all'asse y

Infatti l'equazione $y = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ diventa $y' = (-4x' - 2) \cdot e^{-2x}$

3.L'area

$P(\frac{1}{2}; 0)$ $Q(-\frac{1}{2}; 0)$

Sfruttando la simmetria rispetto all'asse y, è sufficiente calcolare l'area dela regione piana, colorata in figura



$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}} -f(x)dx = -2\int_0^{\frac{1}{2}} (4x - 2) \cdot e^{2x}dx$$

Determiniamo l'integrale indefinito $\int (4x - 2) \cdot e^{2x}dx$ con il metodo di integrazione per parti

$$\int (\mathbf{4x} - \mathbf{2}) \cdot \boldsymbol{e^{2x}dx} = \frac{1}{2}e^{2x}(4x - 2) - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 4\, dx = e^{2x}(2x - 1) - e^{2x} = e^{2x}(2\mathrm{x} - 2)$$

$$-2\int_0^{\frac{1}{2}} (4x - 2) \cdot e^{2x}dx = -2[\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}(2\mathrm{x} - 2)]_0^{\frac{1}{2}} = -2[-\mathrm{e} + 2] \cong 1{,}44$$

4.La generica funzione $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$, con $a \in \Re - \{0\}$.

è continua in $\Re$, e ammette derivata prima

$$f'_a(x) = 2a \cdot e^{ax} + 2a^2x \cdot e^{ax} - 2a \cdot e^{ax} = 2a^2x \cdot e^{ax}$$

e derivata seconda uguale a

$$f''(x) = 2a^2 \cdot e^{ax} + 2a^3 \cdot x\, e^{ax} = 2a^2 \cdot e^{ax}(1 + ax)$$

Il punto di flesso è $F_a\left(-\frac{1}{a}; -\frac{4}{e}\right)$ e la tangente in inflessionale t_a ha equazione

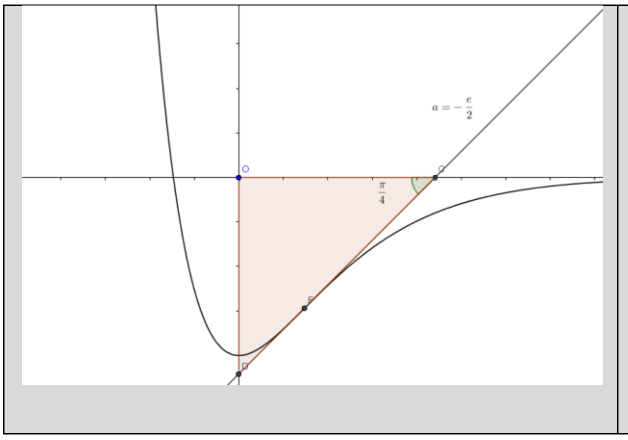
$$y + \frac{4}{e} = f'_a\left(-\frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{1}{a}\right) \to y + \frac{4}{e} = -\frac{2a}{e} \cdot \left(x + \frac{1}{a}\right)$$

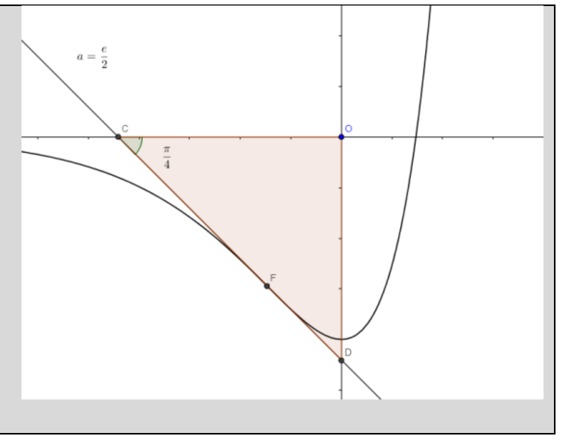
Il coefficiente angolare di t_a è uguale a $-\frac{2a}{e}$, pertanto la retta non è parallela a nessuno degli assi cartesiani e forma con essi un triangolo OCD,rettangolo in O .Il triangolo è isoscele se i segmenti OC e OD , che la retta intercetta sugli assi ,hanno uguale lunghezza, ovvero se gli angoli $O\hat{C}D$ e $O\hat{D}C$ hanno ampiezza $\frac{\pi}{4}$.

La retta deve essere parallela a una delle due bisettrici degli assi

$$-\frac{2a}{e} = 1 \to a = -\frac{e}{2} \quad \cup \quad -\frac{2a}{e} = -1 \to a = +\frac{e}{2}$$

Soluzione di Adriana Lanza





Soluzione di Adriana Lanza