PROBLEMA 2- Europa

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;

2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;

3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y;

4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.

Soluzione

La funzione $f(x) = \ ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx$, per qualunque valore di a e di b, è definita per $x < a$ ed è continua e derivabile nel dominio con

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2ax - 4}{(a-x)(x^2+4)} + b$$

Poiché il punto di ascissa 2 è punto di massimo per $f(x)$, x=2 deve appartenere al dominio e deve essere $2 < a$
Il punto di massimo, pertanto, cade all'interno dell'intervallo di definizione e di conseguenza deve essere necessariamente $f'(2) = 0$.

Anche se no richiesto esplicitamente si fa uno studio preliminare ***del comportamento della funzione alla frontiera del dominio***

$$\lim_{x\to-\infty} \left(ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx\right) = -\infty - \infty \ = -\infty \qquad se\ b > 0$$

In quanto l'argomento del logaritmo tende a 0

Mentre

$$\lim_{x\to-\infty} ln\left(\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx\right) \quad si\ presenta\ nella\ forma\ di\ indecisione\ \ -\infty + \infty$$

$$se\ b < 0$$

Moltiplicando e dividendo per x l'argomento del limite , si ottiene

$$lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x} ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) - b\right) \quad dove$$

$lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} ln(\frac{a-x}{x^2+4})\right)$ *è una forma di indecisione del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$ *alla quale è possibile applicare la regola di De L'Hôpital*

Poiché $lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x^2-2ax-4}{(a-x)(x^2+4)}}{1}\right)$ *=0 possiamo concludere che*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx\right) \ = +\infty \quad se\ b < 0$$

$$\lim_{x\to a^-} \left(ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + \mathrm{bx}\right) = -\infty + ab = -\infty$$

Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} f(0) = & 0 \\ f'(2) = & 0 \end{cases} \to \begin{cases} \ln\frac{a}{4} = & 0 \\ \frac{-a}{2(a-2)} + b = & 0 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{a}{4} = & 1 \to a = 4 \\ b = & \frac{4}{4} \to b = 1 \end{cases}$$

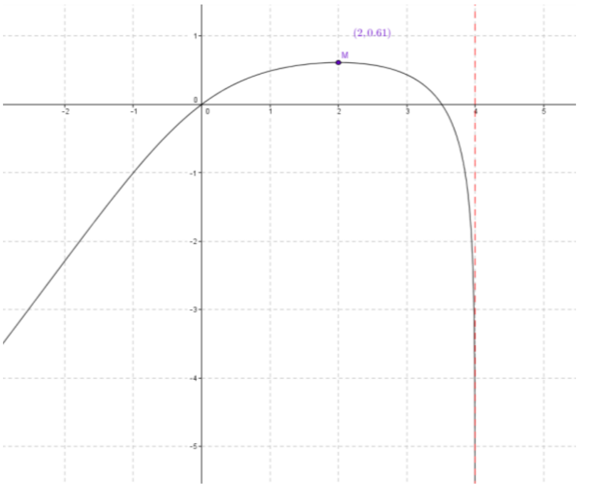
Sostituendo i valori di a e b così determinati nell'espressione della derivata, troviamo

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 4}{(4-x)(x^2+4)} + 1 = \frac{x^2 - 8x - 4 + 4x^2 + 16 - x^3 - 4x}{(4-x)(x^2+4)} =$$

$$\frac{-x^3 + 5x^2 - 12x + 12}{(4-x)(x^2+4)} = \frac{(x-2)(-x^2+3x-6)}{(4-x)(x^2+4)}$$

Soluzione di Adriana Lanza

Segno di $f'(x)$



Il denominatore della frazione è sempre positivo nel dominio di f(x)

Il fattore di secondo grado che compare al numeratore non ha zeri reali e assume solo valori negativi, pertanto

$$f'(x) > 0 \quad per \quad x < 2$$

$$f'(x) < 0 \quad per \quad x > 2$$

La funzione f(x) è crescente $per \quad x < 2$, decrescente per x>2 e ammette per x=2 un massimo relativo e assoluto M$(2; 2 - \ln 4)$

2. L'espressione analitica della funzione è

$f(x) = \; ln(\frac{4-x}{x^2+4}) + x$ x<4

Ricerca di eventuali asintoti

Poiché , come è stato già calcolato, $\lim_{x \to a^-} \left(ln \left(\frac{a-x}{x^2+4} \right) + \text{ bx } \right) = -\infty$

la retta x=4 è asintoto verticale sinistro

Poiché

$lim_{x \to -\infty} \left(ln(\frac{a-x}{x^2+4}) + bx \right) = -\infty$ *se* $b > 0$ *, può esistere un asintoto obliquo di equazione y =mx+q*

Calcoliamo, se esiste,$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$lim_{x \to -\infty} \frac{ln(\frac{4-x}{x^2+4}) + x}{x} = lim_{x \to -\infty} \left(\frac{ln(\frac{4-x}{x^2+4})}{x} + 1 \right) = 1$ poiché, come già è stato calcolato, $lim_{x \to -\infty} \left(\frac{ln(\frac{4-x}{x^2+4})}{x} \right) = 0$

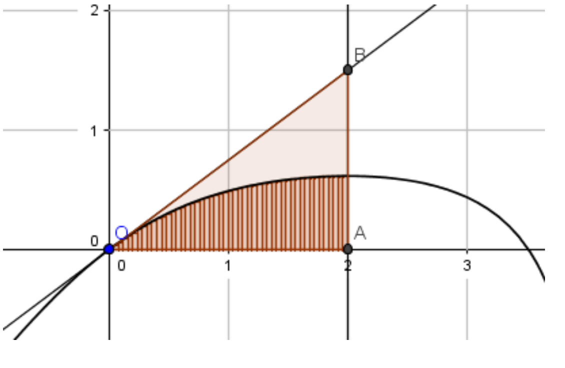
Se l'asintoto obliquo esiste deve essere m=1

Poiché, invece,

$$lim_{x \to -\infty} \left(ln \left(\frac{4-x}{x^2+4} \right) + x - x \right) = -\infty$$

Il valore di q non esiste e la funzione non ammette asintoti obliqui

3. L'equazione della retta tangente nell'origine ha per coefficiente angolare il valore $f'(0)$ $=\frac{3}{4}$ e la sua equazione è $y = \frac{3}{4}x$



La retta passante per il punto M e parallela all'asse y; ha equazione x=2

Le due rette si incontrano nel punto $B\left(2; \frac{3}{2}\right)$

Soluzione di Adriana Lanza

L'area richiesta è differenza fra il triangolo OAB di area $\frac{3}{2}$ e l'area tratteggiata che corrisponde a $\int_0^2 f(x)dx$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\int \left(\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right)dx =$

$$= \int \ln(4-x)\,dx - \int \ln(x^2+4)\,dx + \int x dx$$

Calcoliamo $\int \ln(4-x)\,dx$ con il metodo di integrazione per parti

$$\int \ln(4-x)\,dx = x\ln(4-x) - \int \frac{x}{x-4} = x\ln(4-x) - \int \left(1+\frac{4}{x-4}\right)dx = x\ln(4-x) - x - 4\ln|x-4|$$

Calcoliamo anche $\int \ln(x^2+4)dx$ con il metodo di integrazione per parti

$$\int \ln(x^2+4)dx = x\ln(x^2+4) - \int \frac{2x^2}{x^2+4}\,dx = x\ln(x^2+4) - 2\int \left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx = x\ln(x^2+4) - 2x + 4\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$\int \left(\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right)dx = x\ln(4-x) - x - 4\ln|x-4| - \left(x\ln(x^2+4) - 2x + 4\tan^{-1}\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \left[x\ln(4-x) + x - 4\ln|x-4| - x\ln(x^2+4) - 4\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 =$$

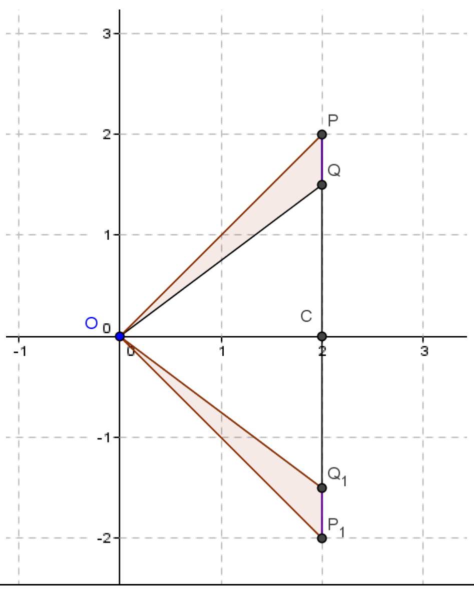
$$= 2\ln 2 + 2 - 4\ln 2 - 2\ln 8 - 4\tan^{-1}1 + 2 + 4\ln 4 = 4 - \pi - 2\ln 2 - 6\ln 2 + 8\ln 2 =$$

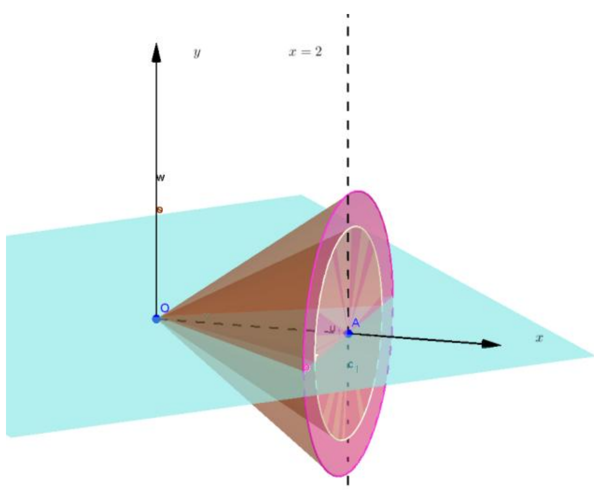
$$= 4 - \pi$$

L'area richiesta è uguale a $\frac{3}{2} - 4 + \pi = -\frac{5}{2} + \pi \cong 0,64$

4. Supponendo che "il suo punto di massimo" si riferisca sempre alla curva , la regione che genera il solido di rotazione è il triangolo OPQ di vertici $O(0;0)$, $P(2;2)$ e $Q\left(2;\frac{3}{2}\right)$ limitato dalle rette di equazione

$$y = x\,; \quad x = 2 \quad ; y = \frac{3}{4}x$$





Il solido ottenuto dalla rotazione di OPQ intorno all'asse x è la differenza dei due coni generati dalla rotazione del triangolo rettangolo OPC e del triangolo rettangolo OQC.

Soluzione di Adriana Lanza

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\pi\overline{PC}^2 \cdot \overline{OC} - \frac{1}{3}\pi\overline{QC}^2 \cdot \overline{OC} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{OC}\left(\overline{PC}^2 - \overline{QC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cdot \left(4 - \frac{9}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi \cong 3,67}$$

Allo stesso risultato si perviene tramite il calcolo integrale

$$\mathrm{V} = \pi\int_0^2 \left(x^2 - \frac{9}{16}x^2\right) dx = \pi\int_0^2 \left(\frac{7}{16}x^2\right) dx = \frac{7}{16}\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{7}{6}\pi$$

Soluzione di Adriana Lanza