PROBLEMA 2_ COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:
1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;

2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;

3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;

4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Soluzione

1. La richiesta perde di significato se si accetta la seguente definizione di funzione:
una funzione f è definita quando

- Sono assegnati due insiemi X (dominio) e Y (codominio)
- E' stabilita una legge che ad ogni elemento x di X associa un ben definito elemento y di Y ; si dice che y è immagine di x mediante $f: y = f(x)$

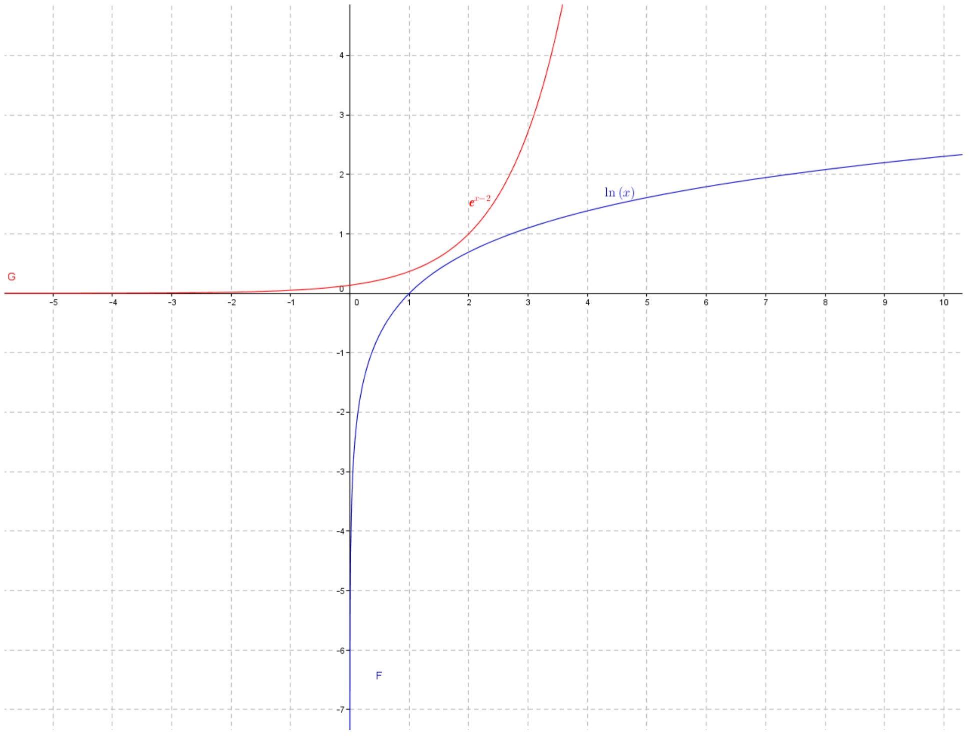
L'insieme delle immagini o insieme Immagine è un sottoinsieme di Y costituito da elementi che sono immagini di almeno un elemento di x.

Per poter dare una risposta esente da ambiguità si interpreta la domanda nel modo seguente:

- determina il dominio naturale delle funzioni f e g, cioè il più grande insieme che può essere scelto come dominio per ciascuna funzione.
- In corrispondenza considera come codominio l'insieme immagine ovvero l'insieme dei valori y =f(x).

$f(x) = \ln(x)$ Dominio $D_f \equiv R^+$ Codominio $C_f \equiv R$

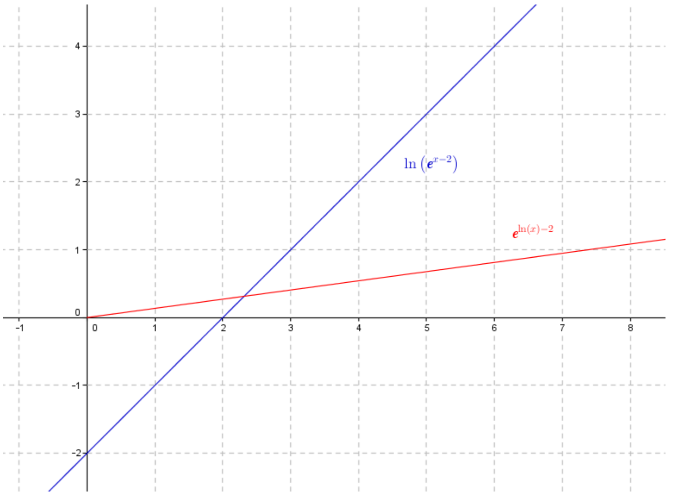
$g(x) = e^{x-2}$ Dominio $D_g \equiv R$ Codominio $C_g \equiv R^+$



Soluzione di Adriana Lanza

Poiché $C_g \equiv D_f$ è possibile costruire la funzione composta $a(x) = f(g(x)) \to \ln(e^{x-2}) = x-2$,il cui dominio è $D_g \equiv R$ e il cui grafico è una retta

Poiché $C_f \equiv D_g$ è possibile costruire la funzione composta $b(x) = g(f(x)) \to e^{\ln x - 2} = e^{-2} e^{\ln x} = e^{-2}\, x$, il cui dominio è $D_f \equiv R^+$ e il cui grafico è una semiretta.



2. Il punto P di ascissa e^2 appartenente a F è
P$(e^2; \ln e^2) \to P(e^2; 2)$
Il coefficiente angolare della retta r tangente a F in P è uguale a $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$
L'equazione di r è $y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2) \to$

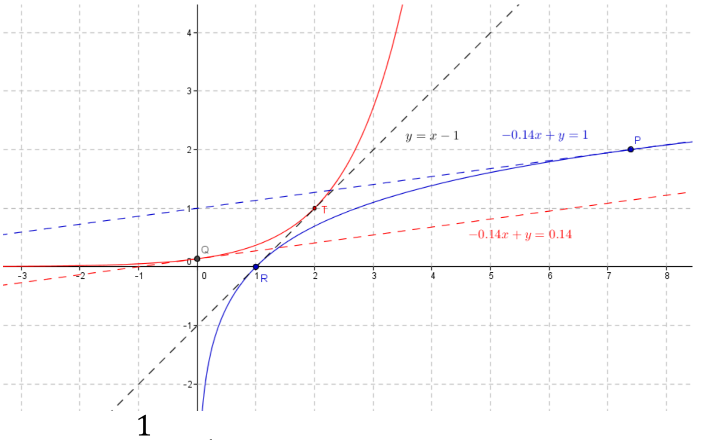
$$y = \frac{1}{e^2}x + 1$$

Sia

$$y = \frac{1}{e^2}x + q$$

una retta s parallela a r e tangente a G nel punto Q$(x_q; y_q)$

Devono essere verificate le due condizioni



$$\begin{cases} g(x_q) = \frac{1}{e^2}x_q + q \\ g'(x_q) = \frac{1}{e^2} \end{cases} \to \begin{cases} e^{x_q - 2} = \frac{1}{e^2}x_q + q \\ e^{x_q - 2} = \frac{1}{e^2} = e^{-2} \to x_q - 2 = -2 \to x_q = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} e^{-2} = q \\ x_q = 0 \end{cases}$$

Il punto Q ha coordinate $(0; g(0)) \to Q\left(0; \frac{1}{e^2}\right)$. La retta s ha equazione $y = \frac{1}{e^2}x + \frac{1}{e^2}$

3. Se la retta t è parallela alla bisettrice del primo quadrante e tangente a F , il punto R di tangenza deve avere ascissa x_R tale che$f'(x_R) = \frac{1}{x_R} = 1 \to x_R = 1$

Il punto R ha coordinate $(1; 0))$ e la retta t ha equazione $y = x - 1$

Per verificare che t è tangente anche a G determiniamo un valore di x (l'ascissa x del punto di tangenza) che soddisfi le seguenti condizioni

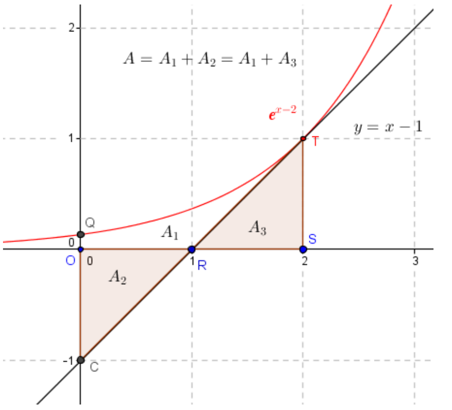
$$\begin{cases} g(x) = x - 1 \\ g'(x) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} e^{x-2} = x - 1 \\ e^{x-2} = 1 \to x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

Poiché sostituendo la soluzione $x = 2$ nella prima equazione troviamo un'identità $1 = 1$

possiamo affermare che t è tangente anche a G e che il punto di tangenza è $T(2; 1)$

Soluzione di Adriana Lanza

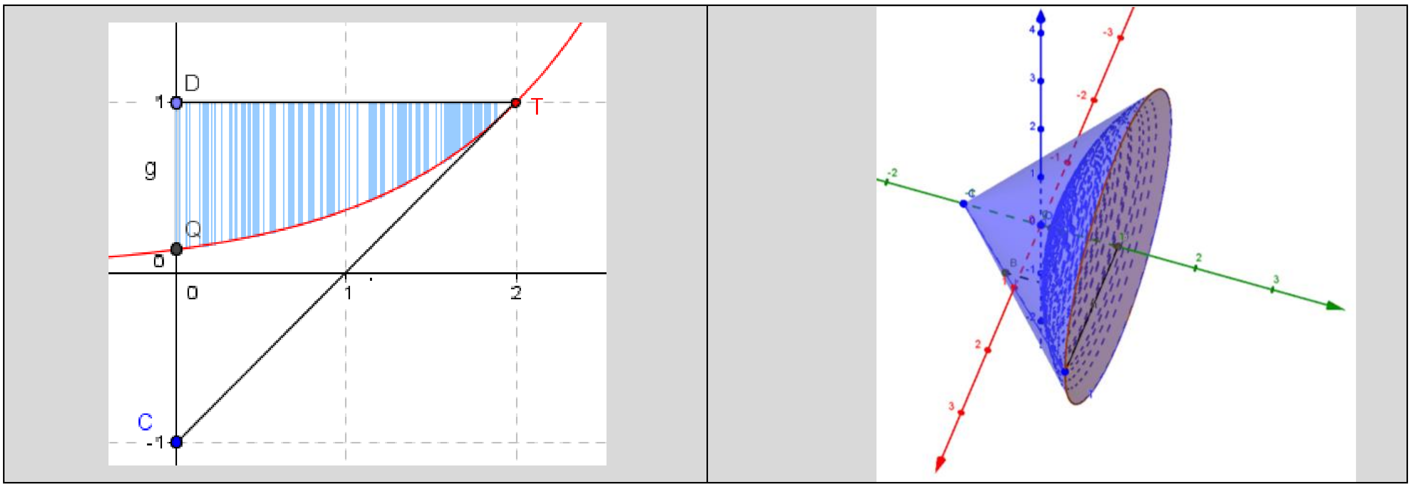
4. Con riferimento alla figura a lato, la regione piana finita A , delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G è l'unione del quadrilatero mistilineo OQTR e del triangolo OCR .
Essendo quest'ultimo congruente al triangolo TRS, la regione A è equivalente al trapezoide OQTS, la cui area è



$$Area_{OQTS} = \int_0^2 e^{x-2}dx = [e^{x-2}]_0^2 = 1 - \frac{1}{e^2} \rightarrow$$

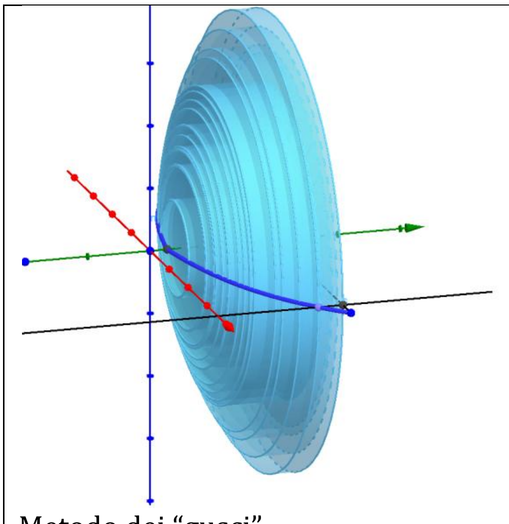
$$\boldsymbol{Area_A = 1 - \frac{1}{e^2} \cong 0,86}$$

Volume del solido

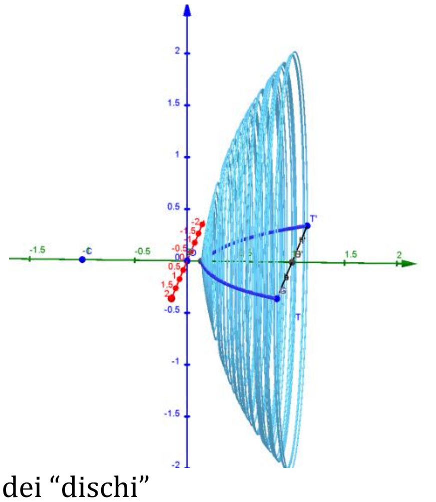


Il solido Ω generato dalla rotazione della regione A intorno all'asse y è la differenza tra il cono di vertice C e apotema CT, e il solido Ω_1 generato dalla rotazione del triangolo mistilineo DQT, tratteggiato in figura.
Il cono, di raggio 2 e altezza 2 , ha volume $V_{cono} = \frac{8}{3}\pi$

Il volume del solido Ω_1 può essere calcolato col metodo dei "dischi" o dei "gusci"



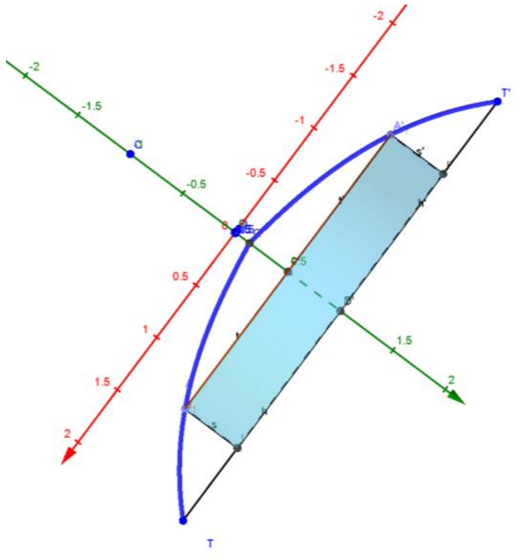
Metodo dei "gusci"



Metodo dei "dischi"

Soluzione di Adriana Lanza

Metodo dei gusci cilindrici



Si considera il solido Ω_1 costituto dalla somma di gusci cilindrici di raggio x, altezza $1-e^{x-2}$, spessore dx

$V_{\Omega_1} = 2\pi \int_0^2 x(1-e^{x-2})\, dx \ = 2\pi \left(\int_0^2 x\, dx - \int_0^2 xe^{x-2}\, dx \right)$

Determiniamo $\int xe^{x-2}\, dx$ con il metodo di integrazione per parti

$$\int xe^{x-2}\, dx = xe^{x-2} - \int e^{x-2}\, dx = xe^{x-2} - e^{x-2} + c \rightarrow$$

$$V_{\Omega_1} = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 - xe^{x-2} + e^{x-2} \right]_0^2 \ = 2\pi \left(2-2+1-\frac{1}{e^2} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

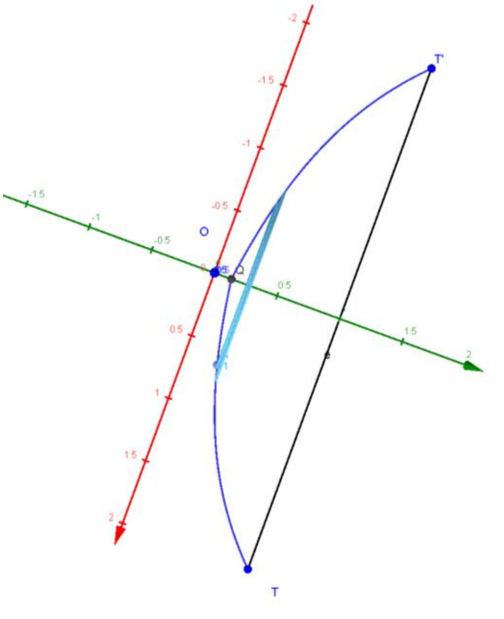
Metodo dei dischi

Si considera il solido Ω_1 costituto dalla somma di "dischi" di raggio x e spessore dy

Per determinare x in funzione di y esplicitiamo la variabile x nell'equazione

$$y = e^{x-2} \rightarrow x = 2 + \ln y$$

$$V_{\Omega_1} = \pi \int_{e^{-2}}^{1} (2+\ln y)^2\, dy = \ \pi \int_{e^{-2}}^{1} (4 + 4\ln y + ln^2 y)\, dy$$



Determiniamo

$\int \ln y\, dy \quad e \ \int ln^2 y\, dy$ col metodo di integrazione per parti

$\int \ln y\, dy$ =$yln\ y$-$\int dy$ $= y\ln y - y$+c

$$\int \ ln^2 y\, dy = yln^2 y \ - 2\int \ \ln y\, dy = yln^2 y \ - 2ylny + 2y + k \rightarrow$$

$\pi \int_{e^{-2}}^{1} (4 + 4\ln y + ln^2 y)\, dy$= $\pi[2y + yln^2 y + 2y\ln y]_{e^{-2}}^{1}$ =

$\pi[2 - 2e^{-2} - 4e^{-2} + 4e^{-2}]$ = $2\,\pi \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

Il volume del solido Ω è $\quad V_\Omega = V_{cono} - V_{\Omega_1} = \frac{8}{3}\pi - 2\,\pi \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$=$\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{e^2}\right)\ \pi \cong 2{,}94$

Soluzione di Adriana Lanza