

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1, x = 1, x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

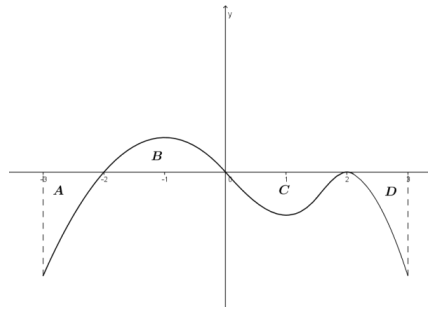


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x)dx$

Soluzione

1. La risposta può fermarsi al livello congetturale.

Poiché non si chiede di determinare il polinomio né quale sia effettivamente il suo grado minimo, la domanda può essere considerata a risposta aperta, lasciando spazio ad argomentazioni su diversi livelli di approfondimento.

Dalle informazioni del testo si evince che la derivata di $f(x)$ ammette tre zeri, in corrispondenza dei tre punti a tangente orizzontale.

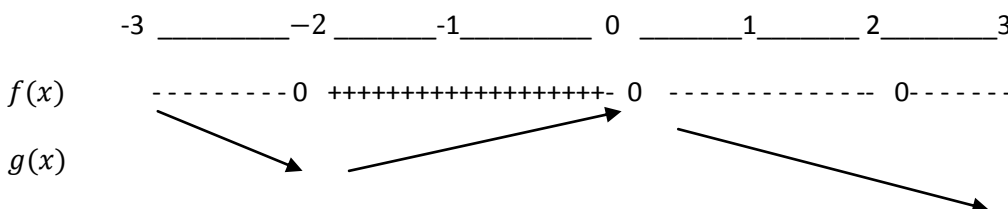
Se $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio la sua derivata sarebbe una funzione polinomiale almeno di grado 3 e il grado di $f(x)$ dovrebbe essere, pertanto, almeno 4.

Se ci si limita al conteggio delle possibili intersezioni di Γ con una retta, dal grafico si evince, inoltre, che esistono rette che incontrano la curva in 4 punti reali, in particolare la curva ha con l'asse x quattro intersezioni, di cui due coincidenti nel punto di ascissa 2.

Questo potrebbe essere sufficiente per poter dire che se Γ è il grafico di un polinomio, questi non potrebbe che avere grado minimo 4 ma in realtà i dati forniti dalla traccia e quelli suggeriti dal grafico in figura consentono di imporre 10 condizioni e impostare un sistema di 10 equazioni nei 10 parametri di un polinomio di grado 9.

L'analisi delle condizioni e la verifica della loro indipendenza va comunque al di là delle finalità e del contesto in cui la traccia è stata formulata

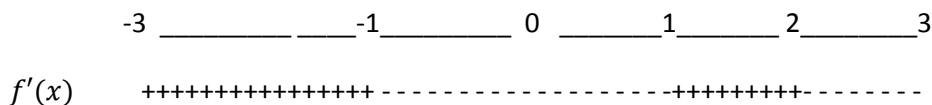
2. L'andamento di $g(x)$ può essere dedotto dall'analisi del segno di $f(x) = g'(x)$



In corrispondenza di $x=0$ si ha un **massimo relativo**.

La convessità di $g(x)$ può essere dedotta dall'analisi del segno di $f'(x) = g''(x)$

La derivata di $f(x)$ è positiva per i valori di x per cui Γ è crescente, è negativa per i valori di x per cui è decrescente



$g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli $-3 < x < -1 \cup 1 < x < 2$

3. Essendo $f(x)$ derivabile, quindi continua, in $[-3;3]$ ed essendo $g(x)$ una primitiva di $f(x)$, sussiste la relazione

$$\int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0)$$

Poiché $\int_0^2 f(x)dx$ equivale all'opposto dell'area della regione C e analogamente $\int_2^3 f(x)dx$ all'opposto dell'area della regione D possiamo porre

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = g(3) - g(0) \rightarrow$$

$$-3 - 1 = -4 = g(3) - g(0) \rightarrow$$

$$g(0) = g(3) + 4 = -5 + 4 = -1$$

Questo risultato comporta che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+1}{2x} \text{ si presenta nella forma di indecisione } \frac{0}{0}$$

Poiché sia la funzione che sta al numeratore, sia quella che sta al denominatore sono derivabili nell'intorno di 0, si può applicare il Teorema di *De L'Hôpital*

Poiché il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = 0$$

esiste anche

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+1}{2x} \text{ e il suo valore è } 0.$$

$$4. \int_{-2}^1 h(x)dx = 3 \int_{-2}^1 f(2x + 1)dx$$

effettuando la sostituzione

$$z = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{1}{2} dz$$

si ottiene, tenendo conto delle aree delle regioni A, B, C, D,

$$\frac{3}{2} \int_{-3}^3 f(z)dz = \frac{3}{2} (-2 + 3 - 3 - 1) = -\frac{9}{2}$$