Quesito 1 Suppletiva

Data la funzione integrale $\int_1^x \ln t \; dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

Soluzione

- La funzione integranda è continua e integrabile per $t > 0$ ed è illimitata per $t \to 0^+$, per cui l'integrale $\int_1^x \ln t \; dt$ diventa improprio se l'intervallo di integrazione contiene lo 0.
  Per verificare se l'integrale improprio converge determiniamo innanzi tutto l'integrale indefinito $\int \ln t \, dt$ che può essere calcolato con il metodo di integrazione per parti
  $\int \ln t \, dt = t \cdot \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} \, dt = t \cdot \ln t - t + c$
- La funzione integranda è integrabile in senso improprio per x =0.
  Infatti, se a è un numero reale positivo
  $\lim_{a \to 0^+} \int_1^a \ln t \, dt = \lim_{a \to 0^+} [t \ln t - t]_1^a = \lim_{a \to 0^+} [a \cdot \ln a - a - 0 + 1] = 1$
  dove il limite $\lim_{a \to 0^+} [a \cdot \ln a]$ *si calcola applicando il Teorema di De L'Hôpital*
  $$\lim_{a \to 0^+} [a \cdot \ln a] = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \right]$$
  Il limite del rapporto delle derivate $\lim_{a \to 0^+} \left[\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} \right] = \lim_{a \to 0^+} -a = 0$
- Il dominio della funzione integrale è pertanto l'intervallo
  $x \geq 0 \;\; e \; risulta$

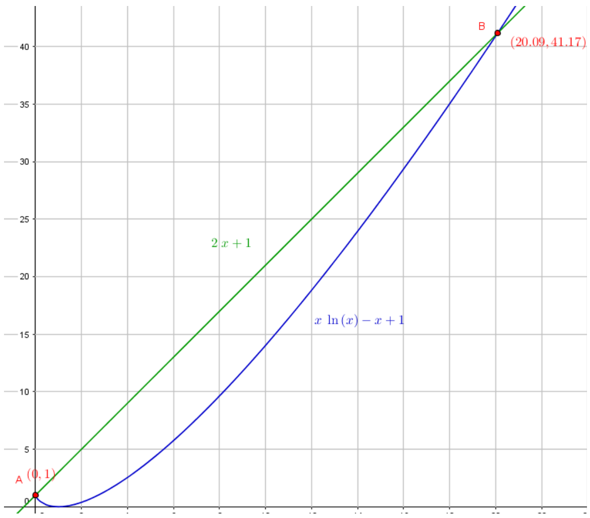
$$\int_1^x \ln t \; dt \;\; = x \cdot \ln x - x + 1$$

Per determinare i punti in cui il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$ risolviamo l'equazione

$$x \cdot \ln x - x + 1 = 2x + 1 \;\to$$
$$x(\ln x - 3) = 0 \to \quad x = 0 \quad \cup \quad x = e^3$$

I punti di incontro sono

$$A(0; 1) \; e \; B(e^3; 2e^3 + 1)$$



Soluzione di Adriana Lanza