Quesito 1. Americhe

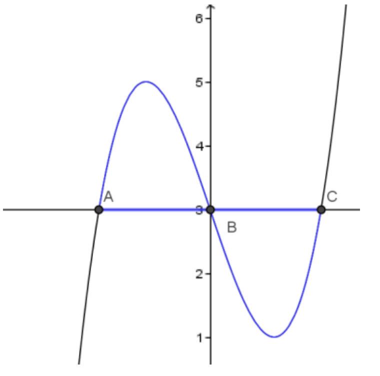
Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

Soluzione

La curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ incontra la retta $y = 3$ in 3 punti reali e distinti

$$A(-\sqrt{3};3) \quad B(0:3) \quad C(\sqrt{3};3)$$

Restano individuate due regioni, delimitate dalla curva e dalla retta, tra loro simmetriche rispetto al puno B che è centro di simmetria della curva



Infatti applicando la trasformazione (simmetria rispetto a B)

$$\begin{cases} x = & -x' \\ y = & 6 - y' \end{cases}$$

$$y = x^3 - 3x + 3 \rightarrow \; 6 - y' = -x'^3 + 3x' + 3 \rightarrow y' = 3 - 3x' + x'^3$$

L'equazione si trasforma in se stessa.

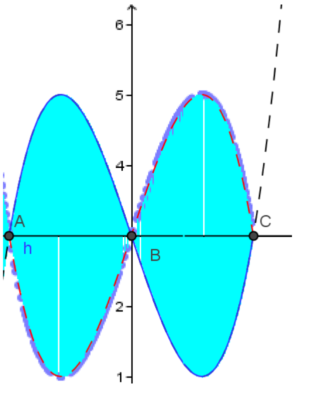
Per il volume richiesto è possibile limitare il calcolo alla rotazione di una delle due regioni.

Poiché le sezioni del solido con piani perpendicolari all'asse di rotazione sono cerchi di raggio$|3 - y|$

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^{\sqrt{3}}(3-y)^2dx \;\rightarrow\; V = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3-y)^2dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(x^6 - 6x^4 + 9x^2)dx =$$

$$2\pi\left[\frac{x^7}{7} - 6\frac{x^5}{5} + 3x^3\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left[\left(\frac{x^4}{7} - 6\frac{x^2}{5} + 3\right)x^3\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$6\sqrt{3}\pi\left(\frac{45 - 126 + 105}{35}\right) = \frac{144}{35}\sqrt{3}\pi \cong 22{,}4$$



Soluzione di Adriana Lanza