Quesito 2- Americhe

Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

è definita per $x \epsilon \Re - \{0\}$ ed è continua nel dominio.

Il valore x= 0 non appartiene al dominio ma è punto di accumulazione del dominio, pertanto

è lecito studiare l'esistenza dei due limiti

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$

Poiché

$\lim_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 0$ $\lim_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$

si ottiene

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 1$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 0$

Poiché il limite sinistro e il limite destro esistono, entrambi finiti, ma sono diversi tra loro, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

presenta un "salto" nell'intorno di 0.

Più che discontinuità , proprietà che si può attribuire ai punti in cui la funzione è definita, si dovrebbe parlare di <<singolarità>>

Anche per la funzione

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

definita per $x \in \Re - \{0\}$ valgono le stesse considerazioni

Si trova però

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ = $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ =0

Poiché il limite sinistro e il limite destro esistono, entrambi finiti, e sono uguali tra loro, la funzione

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ammette un prolungamento continuo per x=0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si parla perciò di singolarità eliminabile.

Soluzione di Adriana Lanza