

Quesito 3-Americhe

Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

- qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
- descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

Soluzione

a) La probabilità che un individuo di quella popolazione sia malato è $p = 0,15$.

Supponendo che i 20 alunni della classe costituiscano un campione casuale della popolazione (campionamento da popolazione infinita senza reimmissione), la variabile casuale $X = \text{«numero di alunni malati»}$ è ricondotta alla variabile "conteggio del numero di successi di un evento A in n prove indipendenti" ovvero "il numero dei successi ottenuti in un campione di n osservazioni".

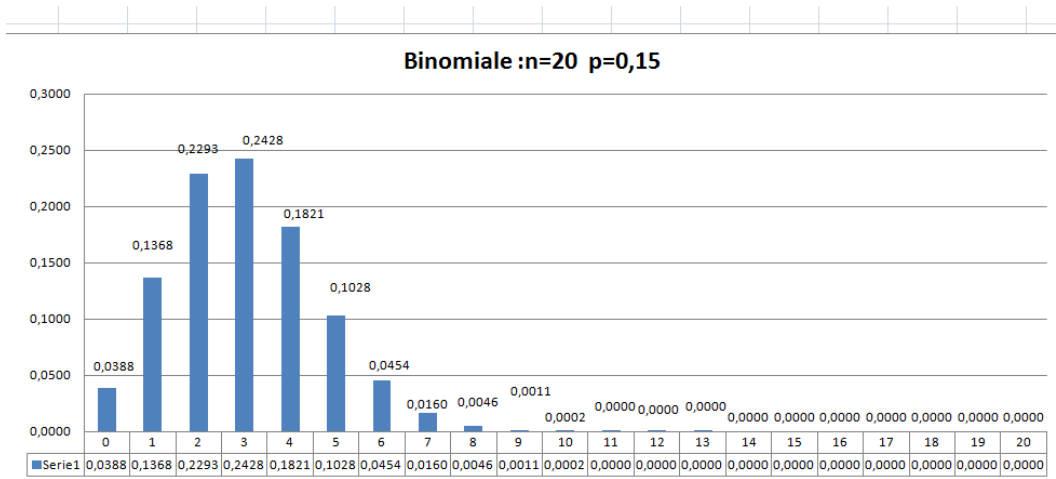
La distribuzione è di tipo binomiale:

Se si eseguono n prove tutte nelle medesime condizioni, in modo che sia sempre p la probabilità che un certo evento A si realizzi e sia sempre $q = (1 - p)$ la probabilità che si realizzi il suo complementare \bar{A} , la probabilità che l'evento A si realizzi k volte nelle n prove, è:

$$P(k) = C_{n,k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

dove il termine $C_{n,k}$ rappresenta le combinazioni semplici di classe k di n elementi (o coefficienti binomiali).

Nel nostro caso $P(k) = C_{20,k} 0,15^k 0,85^{20-k}$



La probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza è uguale alla somma

$$\sum_{k=3}^{20} P(k) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = 1 - (0,0388 + 0,1368 + 0,2293) = 1 - 0,4049 \cong 0,60 = 60\%$$

b) Nel caso in cui $n = 500$ conviene approssimare la distribuzione binomiale con la distribuzione normale avente media $\mu = np = 500 * 0,15 = 75$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{npq} = 7,98$

La funzione di distribuzione normale $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

e il suo grafico è la curva di Gauss.

Se X è un valore della variabile aleatoria, la probabilità che X appartenga all'intervallo $[a; b]$

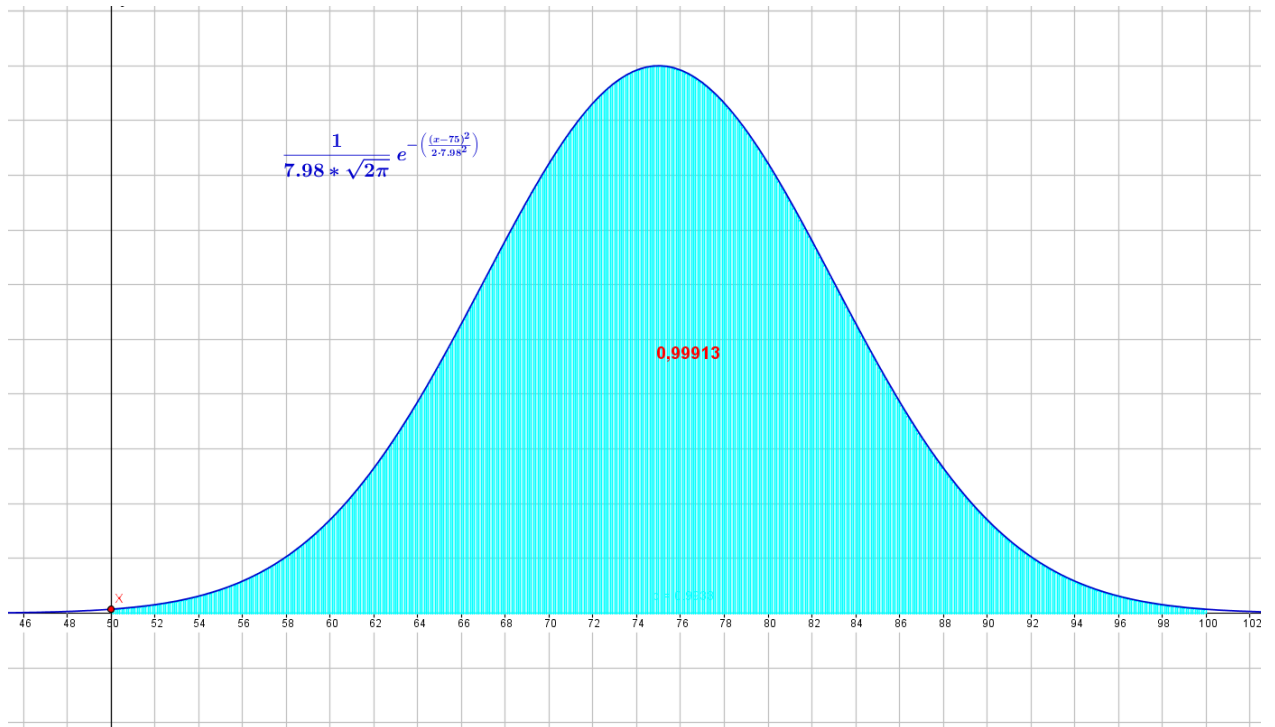
$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$

Geometricamente è l'area sottesa dalla curva sull'intervallo $[a; b]$

In particolare

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x) dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x) dx = 0,5 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

La probabilità $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50)$ corrisponde a $\int_{50}^{+\infty} f(x) dx$ ed è rappresentata dall'area colorata in figura



Il valore è fornito da opportuni strumenti di calcolo

n	p	q	m	sigma	X
500	0,15	0,85	75	7,98	50

P(X<=50) P(X>50)
 0,000871 0,999129

Curva di Gauss standardizzata

Per utilizzare le apposite tavole statistiche è necessario fare riferimento alla distribuzione normale standardizzata :

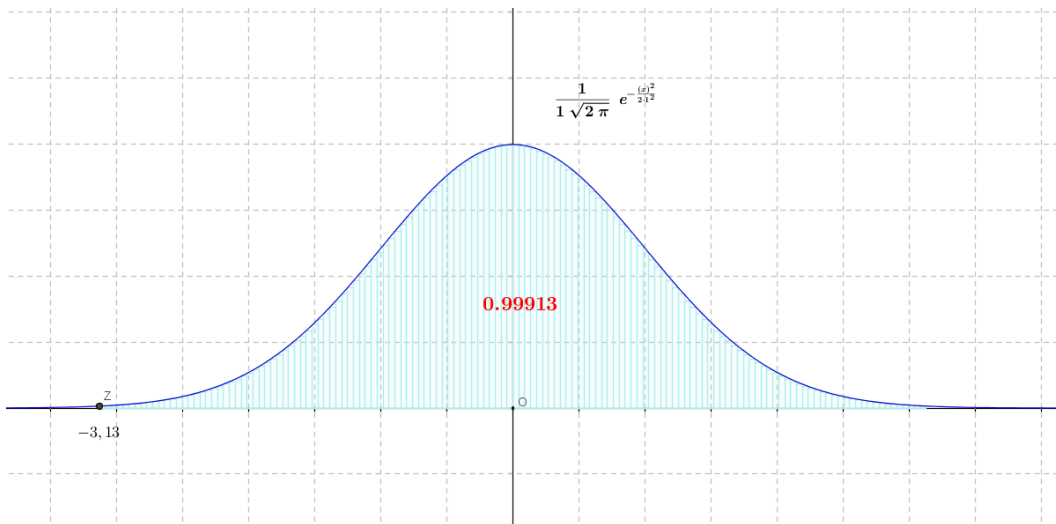
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Avente media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$, risultato della trasformazione

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

Nel nostro caso il valore $X = 50$ deve essere trasformato nel valore standardizzato

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{50 - 75}{7,98} \cong -3,13$$



Per verificare che $P(X \geq 50) = P(Z \geq -3,13) > 99\%$ deve essere noto il valore dell'area tratteggiata in figura che corrisponde al valore dell'integrale $\int_{-3,13}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Si può utilizzare, per esempio, una Tavola della funzione di ripartizione $F(Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Per la simmetria della curva

$$\int_{-3,13}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{3,13} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La tabella fornisce il valore $F(3,13) = 0,99913$ pertanto

se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
0,00	0,50000	0,50	0,69146	1,00	0,84134	1,50	0,93319	2,00	0,97725	2,50	0,99379	3,00	0,99865
0,01	0,50399	0,51	0,69497	1,01	0,84375	1,51	0,93448	2,01	0,97778	2,51	0,99396	3,01	0,99869
0,02	0,50798	0,52	0,69847	1,02	0,84614	1,52	0,93574	2,02	0,97831	2,52	0,99413	3,02	0,99874
0,03	0,51197	0,53	0,70194	1,03	0,84849	1,53	0,93699	2,03	0,97882	2,53	0,99430	3,03	0,99878
0,04	0,51595	0,54	0,70540	1,04	0,85083	1,54	0,93822	2,04	0,97932	2,54	0,99446	3,04	0,99882
0,05	0,51994	0,55	0,70884	1,05	0,85314	1,55	0,93943	2,05	0,97982	2,55	0,99461	3,05	0,99886
0,06	0,52392	0,56	0,71226	1,06	0,85543	1,56	0,94062	2,06	0,98030	2,56	0,99477	3,06	0,99889
0,07	0,52790	0,57	0,71566	1,07	0,85769	1,57	0,94179	2,07	0,98077	2,57	0,99492	3,07	0,99893
0,08	0,53188	0,58	0,71904	1,08	0,85993	1,58	0,94295	2,08	0,98124	2,58	0,99506	3,08	0,99896
0,09	0,53586	0,59	0,72240	1,09	0,86214	1,59	0,94408	2,09	0,98169	2,59	0,99520	3,09	0,99900
0,10	0,53983	0,60	0,72575	1,10	0,86433	1,60	0,94520	2,10	0,98214	2,60	0,99534	3,10	0,99903
0,11	0,54380	0,61	0,72907	1,11	0,86650	1,61	0,94630	2,11	0,98257	2,61	0,99547	3,11	0,99906
0,12	0,54776	0,62	0,73237	1,12	0,86864	1,62	0,94738	2,12	0,98300	2,62	0,99560	3,12	0,99910
0,13	0,55172	0,63	0,73565	1,13	0,87076	1,63	0,94845	2,13	0,98341	2,63	0,99573	3,13	0,99913
0,14	0,55567	0,64	0,73891	1,14	0,87286	1,64	0,94950	2,14	0,98382	2,64	0,99585	3,14	0,99916
0,15	0,55962	0,65	0,74215	1,15	0,87493	1,65	0,95053	2,15	0,98422	2,65	0,99598	3,15	0,99918
0,16	0,56356	0,66	0,74537	1,16	0,87698	1,66	0,95154	2,16	0,98461	2,66	0,99609	3,16	0,99921
0,17	0,56749	0,67	0,74857	1,17	0,87900	1,67	0,95254	2,17	0,98500	2,67	0,99621	3,17	0,99924
0,18	0,57142	0,68	0,75175	1,18	0,88100	1,68	0,95352	2,18	0,98537	2,68	0,99632	3,18	0,99926
0,19	0,57535	0,69	0,75490	1,19	0,88298	1,69	0,95449	2,19	0,98574	2,69	0,99643	3,19	0,99929
0,20	0,57926	0,70	0,75804	1,20	0,88493	1,70	0,95543	2,20	0,98610	2,70	0,99653	3,20	0,99931
0,21	0,58317	0,71	0,76115	1,21	0,88686	1,71	0,95637	2,21	0,98645	2,71	0,99664	3,21	0,99934
0,22	0,58706	0,72	0,76424	1,22	0,88877	1,72	0,95728	2,22	0,98679	2,72	0,99674	3,22	0,99936
0,23	0,59095	0,73	0,76730	1,23	0,89065	1,73	0,95818	2,23	0,98713	2,73	0,99683	3,23	0,99938
0,24	0,59483	0,74	0,77035	1,24	0,89251	1,74	0,95907	2,24	0,98745	2,74	0,99693	3,24	0,99940
0,25	0,59871	0,75	0,77337	1,25	0,89435	1,75	0,95994	2,25	0,98778	2,75	0,99702	3,25	0,99942
0,26	0,60257	0,76	0,77637	1,26	0,89617	1,76	0,96080	2,26	0,98809	2,76	0,99711	3,26	0,99944
0,27	0,60642	0,77	0,77935	1,27	0,89796	1,77	0,96164	2,27	0,98840	2,77	0,99720	3,27	0,99946
0,28	0,61026	0,78	0,78230	1,28	0,89973	1,78	0,96246	2,28	0,98870	2,78	0,99728	3,28	0,99948
0,29	0,61409	0,79	0,78524	1,29	0,90147	1,79	0,96327	2,29	0,98899	2,79	0,99736	3,29	0,99950
0,30	0,61791	0,80	0,78814	1,30	0,90320	1,80	0,96407	2,30	0,98928	2,80	0,99744	3,30	0,99952
0,31	0,62172	0,81	0,79103	1,31	0,90490	1,81	0,96485	2,31	0,98956	2,81	0,99752	3,31	0,99953
0,32	0,62552	0,82	0,79389	1,32	0,90658	1,82	0,96562	2,32	0,98983	2,82	0,99760	3,32	0,99955
0,33	0,62930	0,83	0,79673	1,33	0,90824	1,83	0,96638	2,33	0,99010	2,83	0,99767	3,33	0,99957
0,34	0,63307	0,84	0,79955	1,34	0,90988	1,84	0,96712	2,34	0,99036	2,84	0,99774	3,34	0,99958
0,35	0,63683	0,85	0,80234	1,35	0,91149	1,85	0,96784	2,35	0,99061	2,85	0,99781	3,35	0,99960
0,36	0,64058	0,86	0,80511	1,36	0,91308	1,86	0,96856	2,36	0,99086	2,86	0,99788	3,36	0,99961
0,37	0,64431	0,87	0,80785	1,37	0,91466	1,87	0,96926	2,37	0,99111	2,87	0,99795	3,37	0,99962
0,38	0,64803	0,88	0,81057	1,38	0,91621	1,88	0,96995	2,38	0,99134	2,88	0,99801	3,38	0,99964
0,39	0,65173	0,89	0,81327	1,39	0,91774	1,89	0,97062	2,39	0,99158	2,89	0,99807	3,39	0,99965
0,40	0,65542	0,90	0,81594	1,40	0,91924	1,90	0,97128	2,40	0,99180	2,90	0,99813	3,40	0,99966
0,41	0,65910	0,91	0,81859	1,41	0,92073	1,91	0,97193	2,41	0,99202	2,91	0,99819	3,41	0,99968
0,42	0,66276	0,92	0,82121	1,42	0,92220	1,92	0,97257	2,42	0,99224	2,92	0,99825	3,42	0,99969
0,43	0,66640	0,93	0,82381	1,43	0,92364	1,93	0,97320	2,43	0,99245	2,93	0,99831	3,43	0,99970
0,44	0,67003	0,94	0,82639	1,44	0,92507	1,94	0,97381	2,44	0,99266	2,94	0,99836	3,44	0,99971
0,45	0,67364	0,95	0,82894	1,45	0,92647	1,95	0,97441	2,45	0,99286	2,95	0,99841	3,45	0,99972
0,46	0,67724	0,96	0,83147	1,46	0,92785	1,96	0,97500	2,46	0,99305	2,96	0,99846	3,46	0,99973
0,47	0,68082	0,97	0,83398	1,47	0,92922	1,97	0,97558	2,47	0,99324	2,97	0,99851	3,47	0,99974
0,48	0,68439	0,98	0,83646	1,48	0,93056	1,98	0,97615	2,48	0,99343	2,98	0,99856	3,48	0,99975
0,49	0,68793	0,99	0,83891	1,49	0,93189	1,99	0,97670	2,49	0,99361	2,99	0,99861	3,49	0,99976