QUESITO 4. suppletiva

In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz* sono dati i punti *A* (−3, 4, 0) e *C* (−2, 1, 2). I tre punti *O*, *A* e *C* giacciono su un piano *E*. Determinare l'equazione che descrive il piano *E*.

Soluzione

Il piano E passa per l'origine, pertanto la sua equazione cartesiana può essere scritta nella forma $ax + by + cz = 0$, dove i tre coefficienti (a, b, c) sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità e corrispondono alle componenti di un vettore perpendicolare al piano E.

Primo metodo

Si determinano due dei tre coefficienti in funzione del terzo, imponendo il passaggio per i due punti A e C

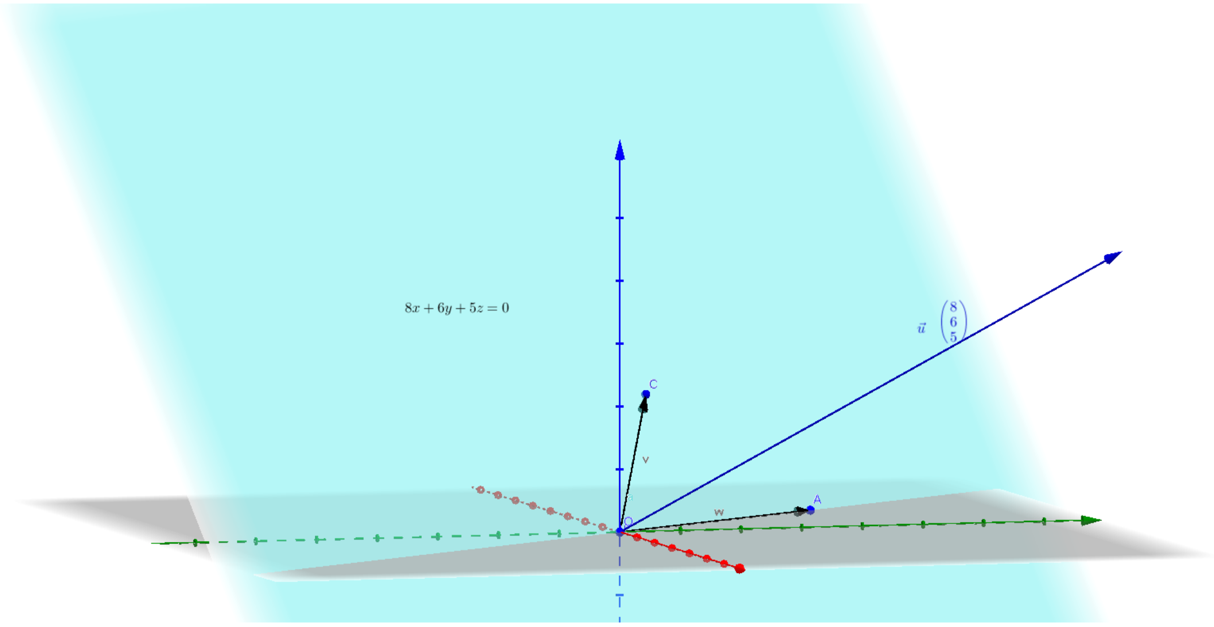
$$\begin{cases} -3a + 4b = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{4} \\ -2a + \frac{3a}{4} = -2c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{5}c \\ a = \frac{8}{5}c \end{cases}$$

L'equazione del piano è $\frac{8}{5}cx + \frac{6}{5}cy + cz = 0$

Poiché c non può essere uguale a 0, altrimenti i coefficienti sarebbero tutti nulli, l'equazione può essere semplificata nella forma $\frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + z = 0 \rightarrow 8x + 6y + 5z = 0$

Secondo metodo

Poiché le rette OA e OC giacciono su E, il vettore $\vec{u}$ *prodotto vettoriale* $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$, perpendicolare a entrambe le rette, è perpendicolare a E; è possibile, pertanto, sostituire le sue componenti al posto dei coefficienti (a, b, c) nell'equazione del piano.



La matrice delle componenti di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ è

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Le componenti del vettore $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ sono uguali ai minori di ordine 2

$u_x = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$ $\quad u_y = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $\quad u_z = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

Pertanto , ponendo $a = 8 \quad b = 6 \quad c = 5$, l'equazione del piano E è

$$8x + 6y + 5z = 0$$