Quesito 5. Americhe

Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

Soluzione

La parabola di equazione $y = 4 - x^2$ è simmetrica rispetto all'asse y, incontra quest'ultimo nel punto $V(0: 4)$ (vertice) e l'asse x nei punti $A(2; 0)$ e $B(-2; 0)$.

Indichiamo con $T(t; 4 - t^2)$ un punto dell'arco di parabola VA ,appartenente al primo quadrante , funzione della sua ascissa t , con $0 < t \leq 2$

Se t =0 il punto T coincide con il vertice della parabola , punto in cui la tangente è parallela all'asse x e non forma un triangolo con gli assi cartesiani.

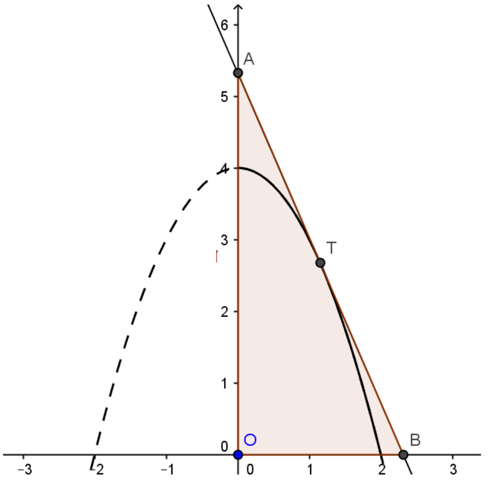
La retta tangente in T ha coefficiente angolare $m = y'(t) = -2t$ e la sua equazione è

$$y - 4 + t^2 = -2t(x - t)$$

Il punto di incontro con l'asse y è $A(0; 4 + t^2)$

Il punto di incontro con l'asse x è $B(\frac{t^2+4}{2t}\ ; 0)$

L'area del triangolo AOB è uguale a $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2}$



$$\mathrm{S(t)} = \frac{(4+t^2)^2}{4t} \quad 0 < t \leq 2$$

Osserviamo che

$$\lim_{t \to 0^+} S(t) = +\infty \qquad S(2) = 8$$

Per determinare il minimo di S(t) studiamo il segno di $S'(t) = \frac{1}{4}\frac{4t^2(4+t^2)-(4+t^2)^2}{t^2} = \frac{4+t^2}{4}\frac{4t^2-4-t^2}{t^2} = \frac{(4+t^2)(3t^2-4)}{4t^2}$

$S'(t)$, nell'intervallo $]0; 2]$ ha un unico zero , $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$

0_______________$\frac{2}{\sqrt{3}}$_______________________2

$S'(t)$ ------------------ 0 ++++++++++++++++++

S(t) ↘ ↗

S assume valore minimo per $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow S(t) = \frac{32}{9}\sqrt{3} \cong 6{,}15$

Soluzione di Adriana Lanza