Quesito 5.Europa

Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 ln(x)\ dx$.

Soluzione

La funzione integranda è continua in (0;1] e presenta una singolarità in x=0 in quanto

$\lim_{x\to 0^+} \ln x\ = -\infty$

La funzione $ln(x)$ è integrabile in senso improprio in $(0;1]$ se esiste ed è finito

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 ln(x)\ dx \qquad \text{essendo } 0<a<1$$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\int \ln x\ dx$ col metodo di integrazione per parti

$$\int \ln x\ dx\ = \mathrm{x}ln(x) - \int dx\ = \mathrm{x}ln(x) - x + c$$

Pertanto $\int_a^1 ln(x)\ dx = [\mathrm{x}ln(x) - x]_a^1\ = -1 - \mathrm{a} \cdot \ln \mathrm{a} + \mathrm{a}$

Nel calcolo di $\lim_{a\to 0^+}(-1 - \mathrm{a} \ln \mathrm{a} + \mathrm{a})$ osserviamo che $\lim\limits_{a\to 0^+} (\mathrm{a} \cdot \ln \mathrm{a})$ si presenta nella forma di

indecisione 0·∞ che può essere ricondotta ad una forma del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *essendo* $\mathrm{a} \cdot \ln \mathrm{a} = \frac{\ln \mathrm{a}}{\frac{1}{\mathrm{a}}}$

Sia la funzione che sta al numeratore, sia quella che sta al denominatore sono derivabili nell'intorno di 0 , quindi si può applicare il Teorema di *De L'Hôpital*

Poiché esiste il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\to 0^+} -a\ = 0$$

esiste anche $\lim\limits_{a\to 0^+} (\mathrm{a} \cdot \ln \mathrm{a})$ e il suo valore è 0.

Possiamo allora calcolare $\lim_{a\to 0^+}(-1 - \mathrm{a} \ln \mathrm{a} + \mathrm{a}) = -1\ \to$

$$\int_0^1 ln(x)\ dx = -1$$

Soluzione di Adriana Lanza