QUESITO 6

Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$. Si determini il minimo di f.

Soluzione

Primo metodo.

Essendo f(x) somma di funzioni derivabili è derivabile e continua $\forall\, x \in R$

con

$$f'(x) = 2\,(x-1) + 2\,(x-2) + 2\,(x-3) + 2\,(x-4) + 2\,(x-5) =$$

$$= 2\,(5x - 15)$$

Per cui

$$f'(x) = 0 \quad per \quad x = 3$$

Inoltre $f'(x) > 0 \quad se \quad x > 3 \qquad\qquad f'(x) < 0 \quad se \quad x < 3$

Poiché f(x) risulta decrescente per $x < 3$ e crescente per $x > 3$, assume il valore minimo per x=3

Il minimo della funzione f è quindi $f(3) = (3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2 + (3-5)^2 = 10$

Secondo metodo.

Allo stesso risultato si perviene per via elementare, senza ricorrere al metodo delle derivate , osservando che f(x) è una funzione polinomiale di secondo grado in quanto si prevede che sviluppando i calcoli il coefficiente del termine x^2 non si annulla .

Il grafico di $f(x)$ è una parabola che volge la concavità verso l'alto poiché, come è facile verificare, il coefficiente di x^2 è positivo .

Proviamo che l'asse della parabola è la retta x =3: l'equazione $y = f(x)$ si muta in se stessa se applichiamo alle coordinate x, y la trasformazione $\begin{cases} x \to 6 - x \\ y \to y \end{cases}$ (simmetria rispetto alla retta $x = 3$)

$f(6 - x) = (5 - x)^2 + (4 - x)^2 + (3 - x)^2 + (2 - x)^2 + (1 - x)^2 = f(x)$

Questo prova ,appunto, che la retta x=3 è asse di simmetria per il grafico di f(x) e che il punto $V(3; 10)$ è il vertice della parabola.

Poiché la parabola volge la concavità verso l'alto il vertice è il punto di minimo.