Quesito 6. Europa 2015

La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{y} = kdt$, dove *k* è una costante e *y* la popolazione di batteri al tempo *t*.
Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20000 batteri?

Soluzione

Determiniamo l'espressione analitica della funzione y(t)

Primo metodo

Se la funzione $y(t)$, che rappresenta il numero di batteri al tempo t, ha un andamento esponenziale, l'incremento Δy relativo ad certo intervallo Δt è proporzionale al valore attuale y, ovvero il tasso di variazione $\frac{\Delta y}{y}$ è costante se riferito a intervalli di tempo di uguale ampiezza.

Sappiamo che l'incremento relativo a $\Delta t = 3$ è uguale a $(6500 - 4000) = 2500$

quindi $\frac{\Delta y}{y} = \frac{2500}{4000} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ in ogni intervallo di tempo uguale a 3.

Possiamo scrivere , pertanto

$$y(0) = y_0$$

$$y(3) = y_0 + \frac{5}{8}y_0 = y_0\left(1 + \frac{5}{8}\right)$$

$$y(6) = y(3) + \frac{5}{8}y(3) = y(3)\left(1 + \frac{5}{8}\right) = y_0\left(1 + \frac{5}{8}\right)^2$$

$$y(t) = y_0\left(1 + \frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$y(t)$ si può scrive come funzione esponenziale in base $\left(1 + \frac{5}{8}\right) = \frac{13}{8}$

purchè all'esponente compaia il numero di intervalli uguali a 3 contenuti nel tempo t

Secondo metodo

La funzione y(t) è soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = & \mathrm{ky} \\ y(0) = & y_0 \end{cases}$$

Con la condizione y>0.

La costante k è il tasso di variazione istantaneo

L'equazione differenziale è a variabili separabili

$$\frac{dy}{y} = kdt \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k\, dt \rightarrow \ln y = kt + c \rightarrow y = e^c e^{kt} = Ce^{kt}$$

dove si è posto $C = e^c$

Imponendo le condizioni $\begin{cases} 4000 = & C \quad se\ t = 0 \\ 6500 = & Ce^{3k}\ se\ t = 3 \end{cases}$

si ottiene $6500 = 4000e^{3k} \rightarrow e^{3k} = \frac{65}{40} = \frac{13}{8} \rightarrow k = \frac{\ln\frac{13}{8}}{3}$

Pertanto $y = 4000e^{\frac{\ln\frac{13}{8}}{3}t}$ che coincide con l'espressione determinata precedentemente essendo

$$e^{\frac{\ln\frac{13}{8}}{3}t} = \left(e^{\ln\frac{13}{8}}\right)^{\frac{t}{3}} = \left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$y = 4000e^{\frac{\ln\frac{13}{8}}{3}t} = 4000\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{t}{3}}$$

Calcolo di y(10)

Poiché

$$y(10) = y_0\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{10}{3}} \cong 4000(5{,}04)$$

Al tempo t=10 il numero di batteri è superiore a 20000

Soluzione di Adriana Lanza