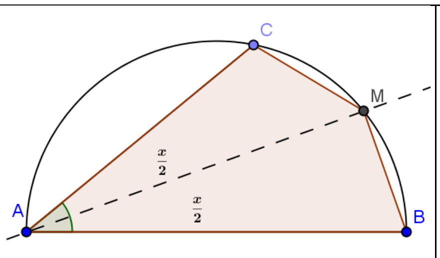
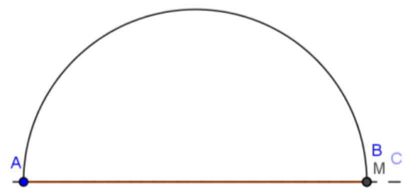
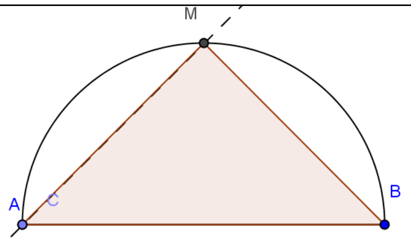
Quesito 6. Suppletiva

Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco BC.
Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.

Soluzione

		
Sia C un punto semicirconferenza di diametro AB $= 2r$ e x l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$ con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ M è il punto medio dell'arco BC, essendo AM bisettrice di $B\hat{A}C$.	La posizione limite $C \equiv B$ corrisponde a x=0 Il quadrilatero ABMC è degenere e ha area nulla	La posizione limite $C \equiv A$ corrisponde a x=$\frac{\pi}{2}$ Il quadrilatero ABMC si riduce al triangolo rettangolo isoscele ABM di area r^2

Consideriamo il quadrilatero ABMC come somma dei due triangoli ABM e AMC, pertanto

$$S(x) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AM} \cdot \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AM} \cdot \sin\frac{x}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \sin\frac{x}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

Essendo

$$\overline{AM} = 2r \cos\frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 2r\cos x \rightarrow$$

$$S(x) = \frac{1}{2}2r \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}(2r + 2r\cos x) =$$

$$essendo\ 2\ cos\frac{x}{2}sin\frac{x}{2} = sin\,x$$

$$= r^2 \sin x\,(1 + \cos x)$$

Per determinare il massimo di S(x) studiamo il segno della derivata $S'(x)$ nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$S'(x) = r^2\cos x\,(1 + \cos x) - r^2 sin^2 x = r^2(\cos x + cos^2 x - sin^2 x) =$$

$$r^2(\cos x + 2cos^2 x - 1)$$

Gli zeri di $S'(x)$ sono le soluzioni dell'equazione

$(\cos x + 2cos^2 x - 1) = 0$ nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Soluzione di Adriana Lanza

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow \cos x = -1 \quad \cup \; \cos x = \frac{1}{2}$$

La radice negativa non è accettabile poiché non corrisponde al coseno di un angolo del primo quadrante.

La seconda radice corrisponde al valore $x = \frac{\pi}{3}$

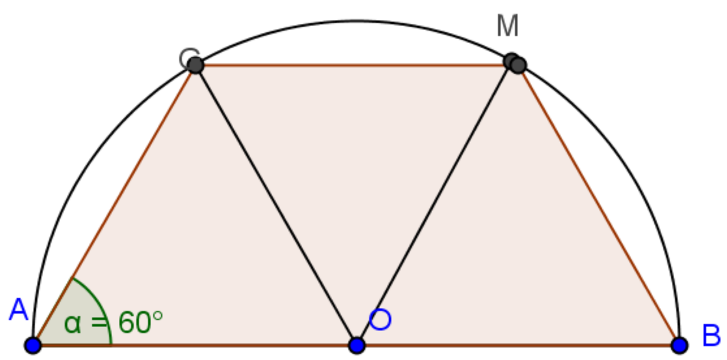
I segno di $S'(x)$=2 $(\cos x + 1)(\ \cos x - \frac{1}{2})$ nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ corrisponde al segno del terzo fattore $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$,essendo i primi due sempre positivi

	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
S'(x)	+++++++++++++++++++++++		---------------------
S(x)	↗		↘

La funzione S(x) assume valore massimo per $x = \frac{\pi}{3}$

Il valore massimo S_{max} = $S(\frac{\pi}{3})$=$\frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$

Se $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$ il triangolo OAC , dove O è il centro della semicirconferenza, è equilatero e l'arco AC è la terza parte della semicirconferenza.



Di conseguenza

- l'arco BC è uguale ai $\frac{2}{3}$ della semicirconferenza
- i punti C e M dividono la semicirconferenza in tre parti uguali
- Il quadrilatero di area massima è il semiesagono regolare inscritto nella semicirconferenza, somma di 3 triangoli equilateri di lato r.

Si ritrova S_{max} =3 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

Soluzione di Adriana Lanza