Quesito 7.Americhe

Calcolare il valor medio della funzione

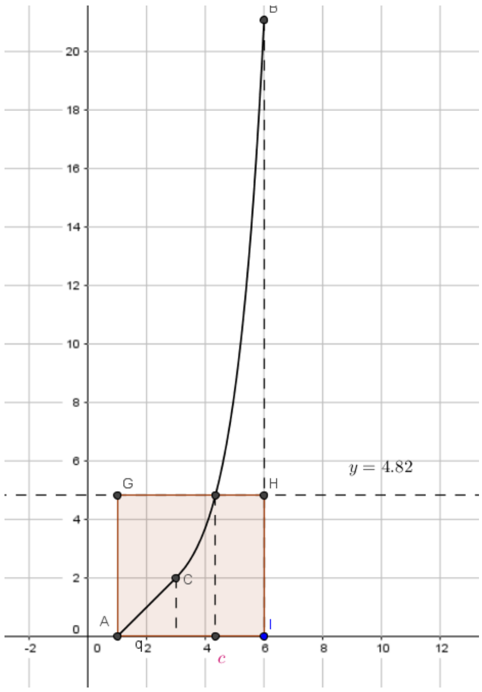
$$f(x)=\begin{cases} x-1 & 1\le x\le 3 \\ e^{x-3}+1 & 3<x\le 6 \end{cases}$$

e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

Soluzione

La funzione $f(x)$ è definita a tratti ed è continua per $1 \le x < 3 \quad \cup \quad 3 < x \le 6$

Verifichiamo se è continua anche per x=3



$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-1) = 2 = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(e^{x-3}+1\right) = 2 = f(3)$$

$$\text{Poichè } \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

la funzione è continua in $[1;6]$ e quindi integrabile nello stesso intervallo.

Il valor medio è uguale a $\frac{\int_1^6 f(x)dx}{5} = \frac{\int_1^3 (x-1)dx+\int_3^6 (e^{x-3}+1)dx}{5} =$

$$\frac{\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3+\left[(e^{x-3}+x)\right]_3^6}{5} = \qquad \frac{2+e^3+2}{5} = \boldsymbol{\frac{e^3+4}{5}} \cong \mathbf{4,82}$$

Poiché la funzione f(x) è continua, il teorema della media integrale assicura che $\exists\, c \in (1;6)$ tale che $f(c) = \frac{\int_1^6 f(x)dx}{5} \rightarrow$

$$5\cdot f(c) = \int_1^6 f(x)dx$$

Geometricamente : l'area del rettangolo AGHI rappresentato in figura è uguale all'area del trapezoide individuato da f(x) sull'intervallo [1; 6]

Per determinare c dobbiamo risolvere l'equazione $f(c) = \frac{e^3+4}{5} \cong 4{,}82$

Poiché nell'intervallo [1; 3] f(x) ha valore massimo uguale a 2, il valore di c appartiene all'intervallo [3; 6]

$$f(c) = \frac{e^3+4}{5} \rightarrow\ e^{c-3}+1 = \frac{e^3+4}{5} \rightarrow e^{c-3} = \frac{e^3-1}{5} \quad \rightarrow \quad c = \ln\frac{e^3-1}{5}+3 \ \cong 4{,}34$$

Soluzione di Adriana Lanza