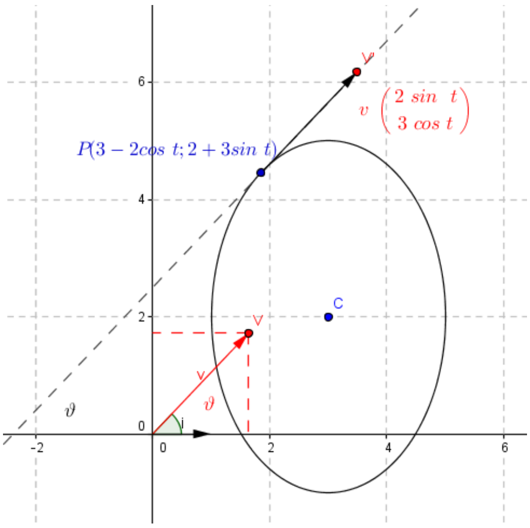
Quesito 7-Europa

Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:
$x(t) = 3 - 2 \cdot cos(t), y(t) = 2 + 3 \cdot sen(t)$.
Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per t che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di ϑ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse x, per $t = \frac{2}{3}\pi$ secondi

Soluzione

Le equazioni parametriche $\begin{cases} x(t) = & 3 - 2 \cdot \cos(t) \\ y(t) = & 2 + 3 \cdot sen(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

definiscono un'ellisse di centro $C(3;2)$ e semiassi uguali a 2 e a 3 , rispettivamente.



Infatti scrivendo le equazioni nella forma seguente ed eliminando il parametro si trova

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = & \cos(t) \\ \frac{y-2}{3} = & sen(t) \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = \cos(t)^2 + sen(t)^2 \rightarrow$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Il vettore $\vec{v}$ di componenti $\begin{cases} v_x = & \dot{x} = & 2\sin t \\ v_{y=} & \dot{y} = & 3\ \cos t \end{cases}$ rappresenta la velocità della particella al tempo t.

La sua direzione è parallela alla tangente alla traiettoria nel punto corrispondente e l'angolo ϑ che esso forma col versore $\vec{\imath}$ dell'asse x è tale che

$$\sin\vartheta = \frac{3\ \cos t}{\sqrt{4(\sin t)^2 + +9(\cos t)^2}} \qquad \cos\vartheta = \frac{2\sin t}{\sqrt{4(\sin t)^2 + +9(\cos t)^2}}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente nel punto P $(3-2\cdot cos(t)\,;2+3\cdot sen(t)\,)$ *è*

m= $\tan\vartheta=\frac{3\ cos\,t}{2\,sin\,t}$ *con* $t\neq 0\ \ \cap t\neq\pi$ *e può essere calcolato anche geometricamente.*

Per evitare calcoli laboriosi trasliamo l'ellisse secondo il vettore $\binom{-3}{-2}$ *in modo che il centro coincida con l'origine O.*

Poiché la traslazione conserva gli angoli e il parallelismo il valore di m sarà uguale al coefficiente angolare della tangente all'ellisse di equazione

$$\frac{(x)^2}{4}+\frac{(y)^2}{9}=1$$

nel punto P' di coordinate $(-2\cdot cos(t)\,;3\cdot sen(t)\,)$

Scriviamo l'equazione della retta tangente utilizzando la formula di sdoppiamento

$$\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}=1\rightarrow\frac{-2\,cos(t)x}{4}+\frac{3\cdot sen(t)\,y}{9}=1\qquad\qquad \textit{dove}$$

$$m=\frac{2\,cos(t)}{4}\cdot\frac{9}{3\cdot sen(t)}=\frac{3\ cos\,t}{2\,sin\,t}$$

La relazione funzionale tra le variabili ϑ *e* t

$$\vartheta=\sin^{-1}\frac{3\ \cos t}{\sqrt{4(\sin t)^2++9(\cos t)^2}}\qquad=\cos^{-1}\frac{2\sin t}{\sqrt{4(\sin t)^2++9(\cos t)^2}}=$$

$$se\ t\neq 0\ \ \cap t\neq\pi\qquad\qquad=\ \tan^{-1}\frac{3\ \cos t}{2\sin t}$$

La velocità di variazione di ϑ per $t\ =\ \frac{2}{3}\pi$ è $\vartheta'(\frac{2}{3}\pi\ )$

Poichè $D\left(\tan^{-1}\frac{3\ \cos t}{2\sin t}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{3\ \cos t}{2\sin t}\right)^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{(\sin t)^2}=\frac{-6}{4(\sin t)^2+9(\cos t)^2}\rightarrow$

$$D\left[\tan^{-1}\frac{3\ \cos t}{2\sin t}\right]_{t=\frac{2}{3}\pi}=\frac{-6}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+9\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{8}{7}\frac{rad}{s}$$