Quesito 8. Suppletiva

Provare che la funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arctgx$ non ne ha alcuno.

Soluzione

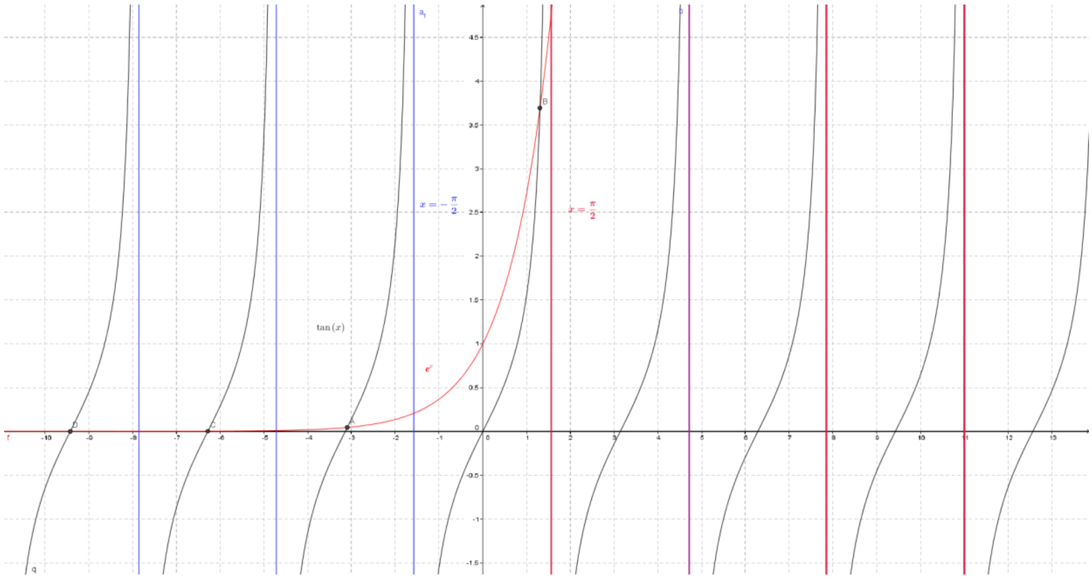
a) La rappresentazione grafica delle due funzioni

$$y = e^x \quad e \quad y = \text{tgx}$$

suggerisce che i due grafici hanno infinite intersezioni per x<0 e un'intersezione nell'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

quindi la funzione $f(x) = e^x - tgx$ ha infiniti zeri



Per una verifica rigorosa osserviamo che $f(x)$ ha infiniti asintoti verticali di equazione

$$x = -\frac{\pi}{2} + k\,\pi \; con \; k \in N$$

Consideriamo per esempio l'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

all'interno del quale $f(x)$ è continua essendo somma algebrica di funzioni continue

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} (e^x - \text{tgx}) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} - (-\infty)\right) = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (e^x - \text{tgx}) = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - (+\infty)\right) = -\infty$

Poiché possibile individuare un intervallo chiuso e limitato agli estremi del quale f(x) assume valori di segno opposto, per il teorema di esistenza degli zeri la funzione ammette almeno uno zero all'interno dell'intervallo.

Poiché il ragionamento può essere ripetuto in modo analogo all'interno di ciascun intervallo

Soluzione di Adriana Lanza

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+ k\pi$$

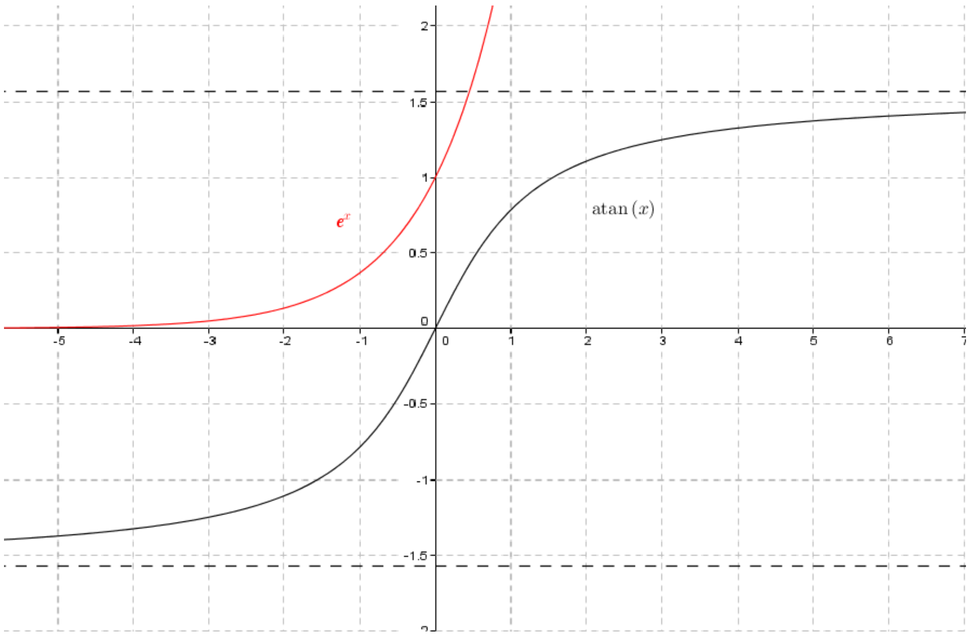
si può concludere che funzione $y = e^x - tgx$ ha infiniti zeri

b) Sia $g(x) = e^x - arctgx$

La rappresentazione grafica delle due funzioni

$y = e^x \quad e \quad y = arctgx$

suggerisce che i due grafici non hanno punti in comune.



Una loro eventuale intersezione non può avere ascissa $x \leq 0$ in quanto

- $e^0 = 1 \quad arctg0 = 0$
- $se\ x < 0 \ \rightarrow e^x > 0 \quad mentre \quad arctgx < 0$

Pertanto g(x) non ammette zeri per x<0

Verifichiamo che la funzione non ammette zeri nemmeno nell'intervallo x>0

La derivata

$g'(x) = e^x - \frac{1}{x^2+1}$ si annulla per x=0 mentre è positiva per x>0 in quanto

- $e^x > 1$
- $\frac{1}{x^2+1} < 1$

Essendo quindi g(x) crescente per x>0 ed essendo g(1)=1, la funzione non assume mai il valore 0 per x>0

E' stato quindi provato che $g(x) = e^x - arctgx$ non ha zeri.

Soluzione di Adriana Lanza

Soluzione di Adriana Lanza