Quesito 9. Americhe

In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = & 2t+1 \\ y = & 1+t \\ z = & kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

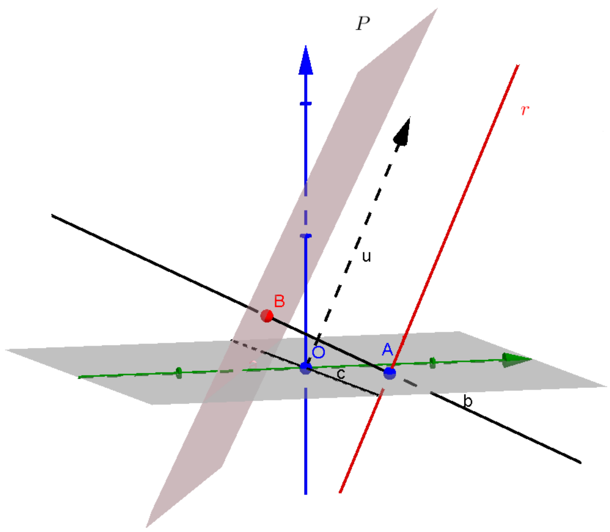
$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Soluzione

Dalle equazioni parametriche di r si deduce che la retta passa per il punto $A(1,1;0)$ ed è parallela al vettore $\vec{u}$ di componenti $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$

I coefficienti delle incognite nell'equazione del piano P, invece, corrispondono alle componenti di un vettore ortogonale al piano



Il vettore $\vec{v}$ di componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è pertanto ortogonale al piano P.

Il piano e la retta sono tra loro paralleli se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono tra loro ortogonali cioè se il loro prodotto scalare è uguale a 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 * 1 + 1 * 2 + k(-1) = 0 \rightarrow 4 - k = 0 \rightarrow k = 4$$

Per calcolare la distanza tra r e P determiniamo il punto B, proiezione ortogonale di A su P.

La retta b di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = & t+1 \\ y = & 2t+1 \\ z = & -t \end{cases}$$

passa per A ed è perpendicolare a P.

Il punto B appartiene a P, pertanto corrisponde al valore del parametro per cui è soddisfatta l'equazione

$$t + 1 + 2\,(2t + 1) + t + 2 = 0 \rightarrow 6t = -5 \rightarrow t = -\frac{5}{6} \rightarrow \quad B \begin{cases} x = & \frac{1}{6} \\ y = & -\frac{2}{3} \\ z = & \frac{5}{6} \end{cases}$$

La distanza $\overline{AB} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \quad \frac{5}{\sqrt{6}}$

Allo stesso risultato si perviene mediante la formula della distanza Punto-Piano

$$d(A,P) = \frac{|1+2-0+2|}{\sqrt{1+2^2+1}} == \quad \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Sluzione di Adriana Lanza