Quesito 9 Europa

Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia:

“Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l’altro e per la loro differenza”.

Soluzione

Siano x e y due numeri reali tali che $x + y = 8$

Sia $F(x; y) \ = xy|x - y|$ la funzione che formalizza il problema.

Osserviamo che , per un assegnato valore di k il sistema $\begin{cases} x + y = & 8 \\ xy|x - y| = & k \end{cases}$

è un sistema simmetrico, cioè se la coppia (a;b) risolve il sistema, anche la coppia (b;a) è soluzione.

La funzione F(x;y) , espressa in funzione della sola variabile x diventa

$$f(x) = x(8 - x)|2x - 8|$$

Non è restrittivo risolvere il problema indicando con x il maggiore dei due numeri e con y il minore e imponendo le condizioni

$$8 = x + y \ \text{ con } \ \ 4 < x < 8 \quad 0 < y \leq 4$$

Possiamo scrivere, più semplicemente

$$F(x; y) = xy(x - y) \rightarrow$$

$$f(x) = x(8 - x)(2x - 8) = -2x^3 + 24x^2 - 64x \rightarrow$$

$$f'(x) = -6x^2 + 48x - 64$$

L’equazione $-6x^2 + 48x - 64 = 0$ ammette le due radici reali la cui somma è $\frac{-48}{-6} = 8$

$x_1 = \frac{12-4\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}69 \qquad x_2 = \frac{12+4\sqrt{3}}{3} \cong 6{,}31$

di cui solo la seconda rispetta le condizioni imposte alla variabile x (sarebbe stata accettabile la seconda se avessimo indicato con x il minore dei due numeri.

L’altro valore x_1 è uguale a $8 - x_2$ e fornisce il valore di y

Segno di f’(x), crescenza o decrescenza di $f(x)$

4____________________________ x_2 ________________________8

$f'(x)$ ++++++++++++++++++++++++++++++ 0 --------------------------------------

$f(x)$ $\nearrow$ $\searrow$

$f(x)$ assume valore massimo per $x = \frac{12+4\sqrt{3}}{3}$

Soluzione di Adriana Lanza

Le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = \frac{12+4\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{12-4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{12-4\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{12+4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Per quanto riguarda il problema di Tartaglia possiamo concludere che

Le due parti in cui si divide il numero 8 (numeri reali non negativi) in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza sono

$$\frac{12-4\sqrt{3}}{3} \qquad e \qquad \frac{12+4\sqrt{3}}{3}$$

In Fig. 1 è rappresentata la funzione $f(x) = x(8-x)(2x-8)$ che presenta un minimo e un massimo, mentre in Fig.2 è rappresentata la funzione $f(x) = x(8-x)|2x-8|$ che presenta due massimi

Il primo grafico è simmetrico rispetto al punto (4,0), il secondo rispetto alla retta x=4.

Nella prima funzione $f(x_1) < 0$ è un minimo, nella seconda è un altro punto di massimo

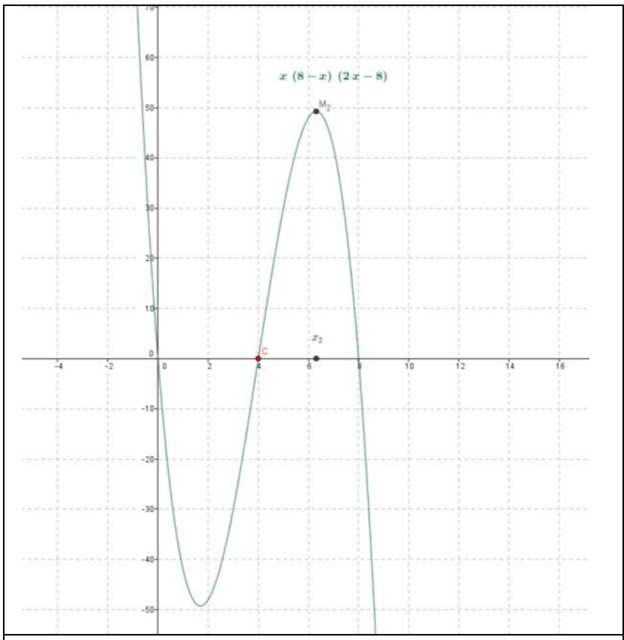

Fig.1

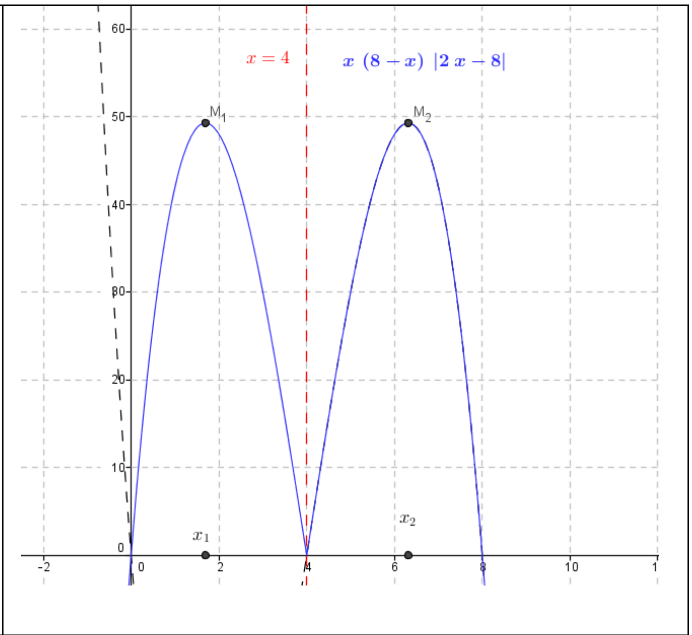

Fig.2

Soluzione di Adriana Lanza

Soluzione di Adriana Lanza