Quesito 9. Suppletiva

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

Soluzione

La derivata di f(x), in un punto x appartenente al dominio, è il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, al tendere a 0 dell'incremento h.

Nel nostro caso si deve calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)e^{x+h}-xe^x}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)e^{x+h}-xe^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)e^x\cdot e^h-xe^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \ \left(\frac{x\,e^h-x}{h}+e^h\right)$$

Il limite $\lim_{h\to 0}\frac{x\,e^h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x\,(e^h-1)}{h}$ si può calcolare ricordando che $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ =1

pertanto

$$= \lim_{h\to 0} e^x \ \left(\frac{x\,(e^h-1)}{h}+e^h\right) = e^x(x+1)$$

Osservazione

Si può verificare direttamente che

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

con il seguente cambiamento di variabile

$$e^h-1=z \to h=\ln(1+z)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z}} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

Soluzione di Adriana Lanza