Quesito 2

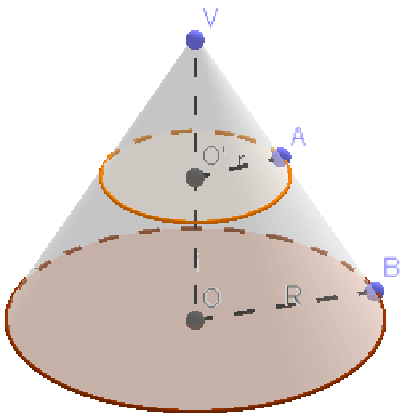
Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula :

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

Soluzione

Determiniamo il volume mediante un integrale per <<sezioni parallele>>, prendendo in considerazione le sezioni ottenute con i piani perpendicolari all'altezza.



Il tronco, di raggi r e R e altezza h, è differenza di due coni, aventi per basi dua cerchi di raggio r e R rispettivamente e altezze

$\overline{VO'} = x_1$ e $\overline{VO} = x_2 = x_1 + h$

Tra le due altezze e i raggi di base sussiste la relazione

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{R}{r}$$

essendo i triangoli VOB e VO'A tra loro simili.

La generica sezione parallela alle basi, ottenuta con un piano distante x dal vertice, ha area S(x) tale che

$$\frac{S(x)}{\pi r^2} = \frac{x^2}{x_1^2} \to V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \frac{\pi r^2}{x_1{}^2}\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{x_1{}^2}[x_2{}^3 - x_1{}^3]$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{x_1{}^2}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{x_1{}^2}h(x_2{}^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{x_1{}^2}h\left(\frac{R^2}{r^2}x_1{}^2 + \frac{R}{r}x_1{}^2 + x_1^2\right) = \mathbf{\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)}$$

Soluzione di Adriana Lanza