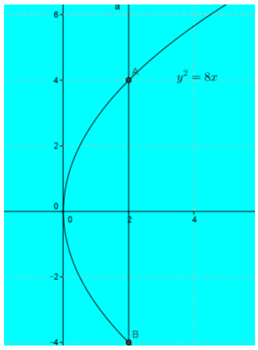
Quesito 5. Suppletiva

Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.

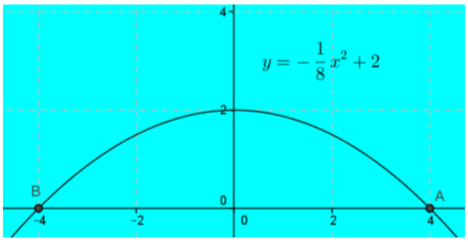
Soluzione



La parabola di equazione $y^2 = 8x$ ha il vertice nell'origine e l'asse coincidente con l'asse x,

La retta a di equazione x=2 forma con essa un segmento parabolico di base il segmento AB, i cui estremi sono $A(2;4) e\ B(2;-4)$

Si tratta sostanzialmente del segmento parabolico intercettato su una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il cui parametro "a" è uguale a $\frac{1}{8}$, da una retta perpendicolare all'asse e distante 2 dal vertice.



In un opportuno riferimento cartesiano la parabola è descritta dall'equazione $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ e l'asse a di rotazione coincide con l'asse x

In quest'ultimo riferimento il volume del solido generato dalla rotazione del segmento parabolico intorno alla retta a è uguale a $\boldsymbol{2\pi \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right)^2 dx} \rightarrow$

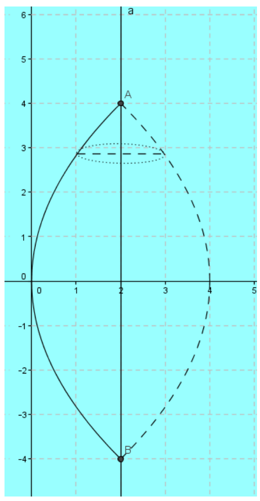
$$V = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4\right) dx = 2\pi\, 2\pi \left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 = 2\pi \left[\frac{16}{5} - \frac{32}{3} + 16\right] = 2\pi \frac{128}{15} =$$

$$\frac{256}{15}\pi \cong 53{,}62$$

Rimanendo nello stesso riferimento cartesiano il volume del solido può

essere calcolato con il metodo del "dischi" o con il metodo dei "gusci cilindrici"

Metodo dei dischi



Sia $x = \frac{1}{8}y^2$ l'equazione della parabola esplicitata rispetto alla variabile x.

Consideriamo il solido suddiviso in "dischi" circolari perpendicolari all'asse di rotazione, aventi raggio pari a $(2 - x)$ e spessore dy.

Il disco a quota y ha raggio uguale a $\left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)$ e volume pari

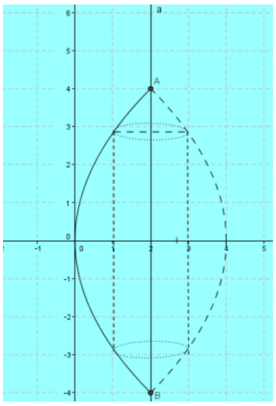
a $\pi \left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2 dy$ pertanto

Soluzione di Adriana Lanza

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2 dy \;\; = 2\pi \int_{0}^{4} \left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2 dy \;\; = \frac{256}{15}\pi \cong 53{,}62$$

Come si osserva facilmente, l'integrale da calcolare coincide con quello già calcolato, a meno del nome della variabile di integrazione

Metodo dei gusci cilindrici



Sia $y = \sqrt{8x}$ l'equazione del ramo di parabola contenuto nel primo quadrante

Consideriamo il solido suddiviso in gusci cilindrici di raggio (2-x), altezza 2y e spessore dx.

Il guscio a distanza x ha altezza uguale a $2\sqrt{8x}$ e volume $2\pi(2-x)2\sqrt{8x}\,dx$

pertanto

$$V = 4\pi\sqrt{8} \int_{0}^{2} (2-x)\sqrt{x}\;\mathrm{dx} = 4\pi\sqrt{8}\left[\frac{4}{3}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\mathrm{x}^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = 4\pi\sqrt{8}\frac{16}{15}\sqrt{2} \;= \frac{256}{15}\pi$$

$$\cong 53{,}62$$

OSSERVAZIONE

Applicando il secondo Teorema di Guldino

Il volume di un solido ottenuto facendo ruotare una figura piana limitata attorno ad un asse che non la attraversi è pari al prodotto della sua area per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro

conoscendo l'area del segmento parabolico (pari a $\frac{2}{3}$ *del rettangolo circoscritto quindi* $=\frac{2}{3}\,16 = \frac{32}{3}$*)*

e la distanza del baricentro dall'asse di rotazione

$= \frac{2}{5}$ *della distanza del vertice dallo stesso asse, quindi* $\frac{2}{5}2 = \frac{4}{5}$,

si trova $V = 2\pi\frac{4}{5}\cdot\frac{32}{3} = \frac{256}{15}\pi$

Soluzione di Adriana Lanza