Quesito 3 Europa

In un riferimento cartesiano OXYZ , si verifichi che la circonferenza γ , intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in (0;0;1) e raggio=$\sqrt{3}$

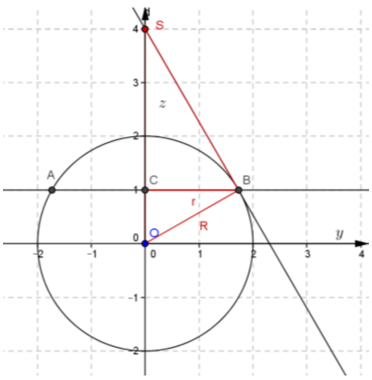
Si immagini che una sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle Z . A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?

Soluzione

Dimostriamo che la circonferenza γ ha il centro nel punto (0;0;1) e raggio $\sqrt{3}$

La circonferenza γ è intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano α di equazione

$z = 1$.



La sfera ha centro nell'origine del riferimento cartesiano e raggio R= 2, il centro C della circonferenza γ è il punto di incontro tra α e la retta ad esso perpendicolare, passante per O, cioè l'asse z.
Le coordinate di C sono, pertanto, (0;0;1) .
Per determinare il raggio osserviamo che qualsiasi piano passante per l'asse z è un piano meridiano che incontra la sfera lungo una circonferenza massima, di raggio 2, mentre taglia il piano della circonferenza lungo una retta ad esso perpendicolare.
In figura è rappresentata la sezione con il piano x=0.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OBC si trova $r = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Fig.1

Posizione della sorgente S

Primo metodo

Con riferimento alla sezione piana della figura 1

Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo OSB si trova

$\overline{OB}^2 = \overline{OS} * \overline{OC}$ da cui

$\overline{OS} = 4$ Pertanto $S(0;0;4)$

Secondo metodo

I raggi luminosi sono semirette uscenti da S e tangenti alla sfera.(Fig.2)

Si deve determinare S in modo che i punti di tangenza siano i punti di γ

Soluzione di Adriana Lanza

Detto T un punto di tangenza, il piano passante per S,O, T deve essere perpendicolare alla retta OT, pertanto S è il punto comune all'asse z e al piano π perpendicolare in T alla retta OT.

Sia il punto T sul piano xz (di equazione y=0)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2= & 4 \\ y= & 0 \\ z= & 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x= & \pm\sqrt{3} \\ y= & 0 \\ z= & 1 \end{cases}$$

Scegliamo $T(\sqrt{3}\,;0;1)$ e osserviamo che le coordinate di T coincidono con le componenti del vettore $\overrightarrow{OT}$, perpendicolare a π

L'equazione del piano π assume la forma $\sqrt{3}\,x+z+d=0$

Poichè passa per T $d=-4$

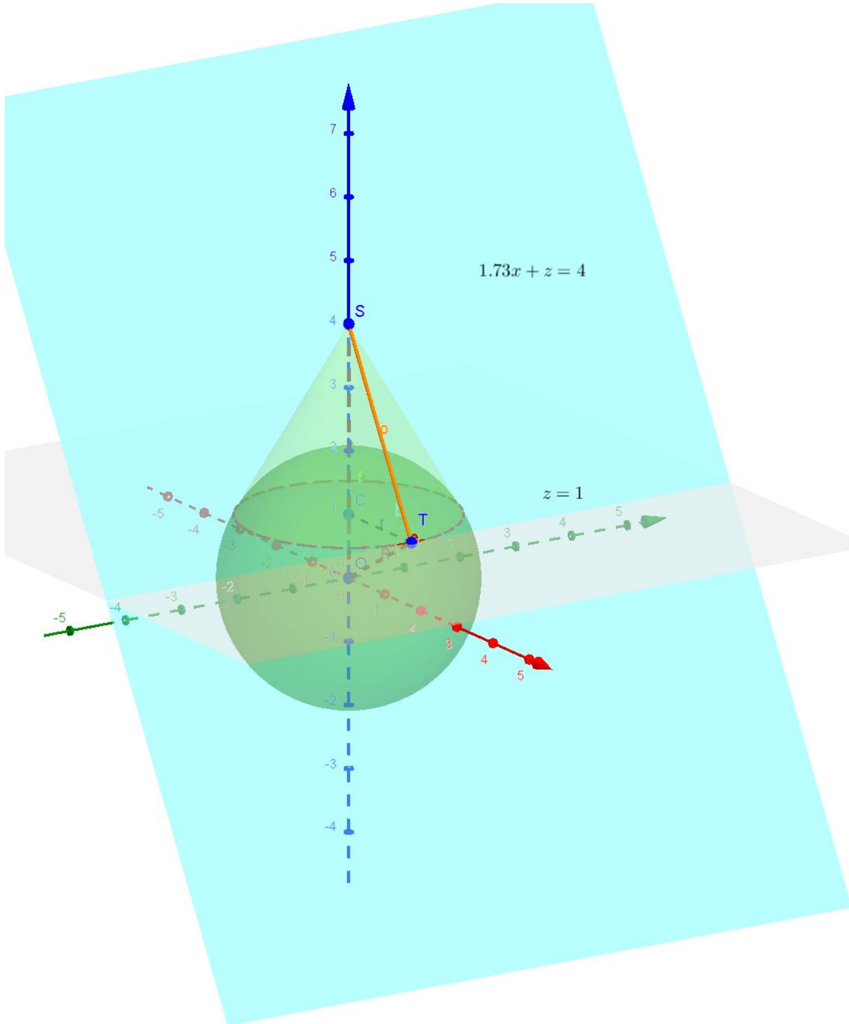


Fig.2

Il punto comune a π e all'asse z è S $\begin{cases} \sqrt{3}\,x+z=4 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow S(0;0;4)$

Soluzione di Adriana Lanza