Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 1. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

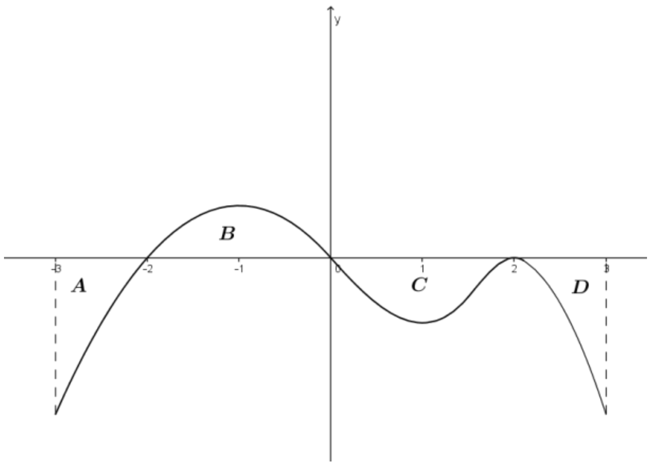

Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Sessione ordinaria 2015
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02C – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: IB72 – SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di *f* nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$
dove *R* ed *r* sono i raggi e *h* l'altezza.
3. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
4. Un solido ha per base la regione *R* del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle *x* nell'intervallo [0, 3]. Per ogni punto *P* di *R*, di ascissa *x*, l'intersezione del solido col piano passante per *P* e ortogonale all'asse delle *x* è un rettangolo di altezza 3*x*. Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}\right)$.
6. Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di *f*.
7. Detta *A(n)* l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in un cerchio *C* di raggio *r*, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
determinare il parametro *k* in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici *A* (1, 0), *B* (4, 0), *C* (4, 2) e *D* (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.