**PROBLEMA 1.**

*Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione.*

*Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto*:

**1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.**

**2. Detto $x_0$ il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina $x_1$ tale che: $g(x_1) = g(x_0)/2$ Traccia il grafico della funzione che esprime $x_1$ in funzione di $x_0$ e discuti il suo andamento.**

*Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse: La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi e , e dalla retta di equazione = 6; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione*. **3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C.**

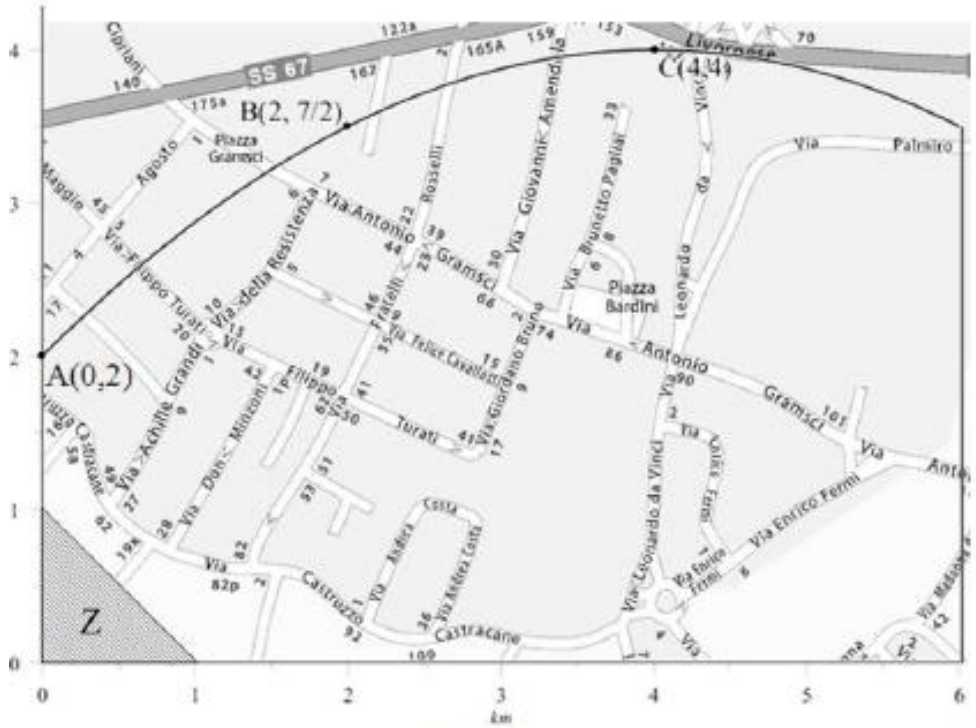



*Figura 1*

*L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti*. **4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.**

# SOLUZIONE

## PUNTO 1.

## Discussione sulla scelta della variabile x

Prima di costruire i modelli matematici idonei a descrivere la situazione reale proposta dal testo è necessario analizzare le caratteristiche della variabile numerica x = minuti di conversazione telefonica.

Poiché il piano tariffario assegna 0,10 euro ad ogni minuto di conversazione, la variabile x è presentata con carattere discreto, anche se è ragionevole pensare di applicare il piano tariffario a frazioni di minuto.

Il testo non fornisce alcuna informazione in proposito, pertanto si può ipotizzare che il numero di minuti venga approssimato per eccesso all'intero più vicino oppure che si adotti un criterio di proporzionalità. In tal caso però x può essere tutt'al più arrotondato ai decimi di minuto, se si vuole frazionare la tariffa unitaria fino al valore significativo del centesimo di euro, oppure i risultati devono essere comunque arrotondati al centesimo di euro.

La scelta di una variabile intera appare quindi semplice e naturale, senza precludere la possibilità di utilizzare il modello matematico anche nel caso in cui la durata della conversazione sia espressa da un numero razionale.

Il ricorso a valori interi di x permette di definire agevolmente il *costo medio al minuto* ,riconducibile sostanzialmente ad una media aritmetica .

In ogni caso la sostituzione di una variabile continua, eventualmente in un dominio illimitato, al posto di una variabile discreta e limitata, di sufficiente numerosità, può essere giustificata dall' esigenza di studiare il modello matematico con i metodi dell'Analisi al fine di acquisire ulteriori informazioni sul fenomeno che si vuole modellizzare.

A ciascuna funzione definita in $\mathbb{N}$ sarà associata un suo prolungamento in un insieme di numeri reali, quale approssimazione del modello discreto.

### Spesa totale

### Espressione analitica e grafico di f(x)

La spesa totale è la somma di

- una spesa fissa pari a 10
- una quantità variabile proporzionale al numero x di minuti di conversazione, uguale a 0,10 x.

Pertanto $\quad \boldsymbol{f(x) = \left(10 + \frac{x}{10}\right)}$ €

Per completare la definizione analitica di f(x) deve essere specificato il dominio $x \in N \quad 0 \le x \le M$, dove M è il numero di minuti contenuti in un mese (mese commerciale di 30 giorni), quindi M=$30 \cdot 24 \cdot 60 = 43200$ minuti

| |
|---|
| MODELLO 1. $\boldsymbol{f(x) = 10 + \frac{x}{10}}$ **con** $\boldsymbol{x \in N} \quad \cap \quad \boldsymbol{0 \le x \le 43200}$ |

I valori di f(x) costituiscono una sequenza finita e crescente di numeri razionali

positivi che esprimono il valore della spesa totale in euro e decimi di euro.

Il grafico, in Fig.1, è costituito da una sequenza di punti allineati, tutti appartenenti alla retta di coefficiente angolare uguale a $\frac{1}{10}$ e intercetta uguale a 10.

L'incremento $\Delta f = \frac{1}{10} \cdot \Delta x$ è proporzionale all'aumento dei minuti stessi (crescita lineare).

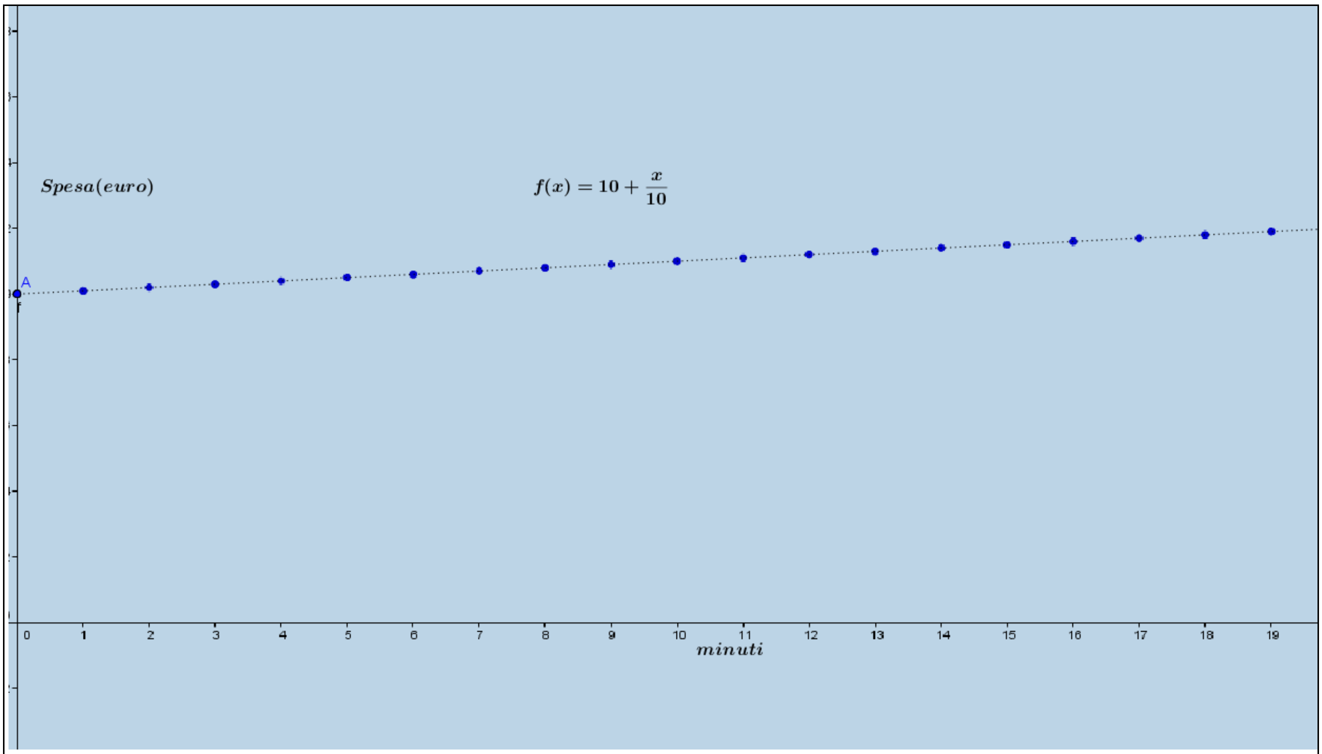



Fig.1

Per ogni $\Delta x$ unitario, l' aumento della spesa è costante e uguale a 0,10 euro

Il valore minimo corrisponde a x=0 con $f(0) = 10$ euro e il valore massimo è $f(M) = 4330\ euro$

**Se non si usa il telefono si paga solo il canone fisso di 10 euro, se lo si usasse ininterrottamente si arriverebbe alla spesa massima .**

La funzione $F(x) = \mathbf{10} + \frac{x}{10}$ $con\ x \in R$

è una approssimazione continua del modello discreto di f(x).

**Il Costo medio unitario**

**Espressione analitica e grafico di g(x)**

Se il piano tariffario non prevedesse un canone fisso, ogni minuto di conversazione costerebbe 0,10 €.

Se il canone fisso costituisse l'intero importo da pagare , indipendentemente dai minuti utilizzati, ogni minuto di conversazione costerebbe $\frac{10}{x}$ €

Il Costo medio al minuto è la media della somma del costo fisso e del costo variabile, calcolata su un numero x di minuti, con x ≠ 0 e quindi

$$g(x) = \frac{10 + \frac{10}{100}x}{x} = \frac{10}{x} + \frac{1}{10}$$

MODELLO 2. $\boldsymbol{g(x)} = \frac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ **con** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N} \quad \cap \quad \mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{43200}$

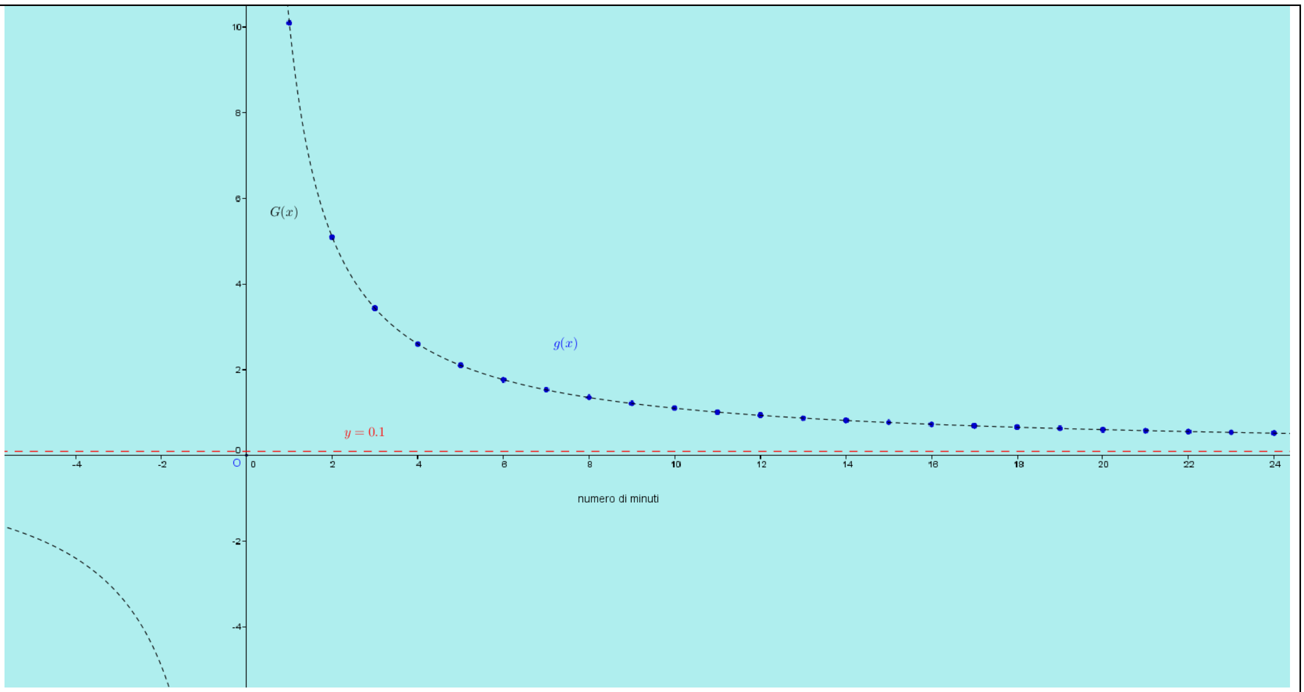
I valori di g(x) costituiscono una sequenza decrescente di numeri razionali positivi, somma di un valore costante e di una quantità positiva inversamente proporzionale a x.

La funzione $G(x) = \frac{10}{x} + \frac{1}{10}$ $con\ x \in R_0$

è una approssimazione continua del modello discreto di g(x);

essa rappresenta l' iperbole equilatera, avente per asintoto verticale la retta di equazione x = 0 e per asintoto orizzontale la retta di equazione $y = \frac{1}{10}$

In figura 2 è rappresentato il grafico di G(x); la sequenza di punti appartenente al ramo di iperbole contenuto nel primo quadrante, rappresenta invece il grafico di g(x):



Fg.2

Il costo medio, su x minuti , diminuisce mentre x si avvicina al valore massimo M in quanto l'influenza del canone fisso diventa trascurabile.

La funzione g(x) ammette sia massimo che minimo assoluto.

Il massimo si ottiene per x=1 con $g(1) = 10{,}10$ , il minimo per x= M con g(M)≅ $0{,}10$ (il valore arrotondato alla quinta cifra decimale è g(M)≅ $0{,}10002$ ) .

Essendo G'(x)= $-\frac{10}{x^2}$ , la pendenza di G(x) tende a 0 al tendere di x a infinito, mentre la curva si avvicina all'asintoto orizzontale y=0,10.

Questo significa che i valori di g(x) decrescono sempre più lentamente al crescere di x e tendono a stabilizzarsi intorno al valore 0,10.

Il valore ultimo di g(x) $= g(43200) \cong 0.1002$ differisce da 0.10 meno di $10^{-3}$.

Sostanzialmente, se l'utente potesse usufruire del servizio telefonico per tutti i minuti contemplati in un mese, il canone fisso non avrebbe alcuna influenza sul costo medio che equivarrebbe a 0,1 euro al minuto

**Verifica dell'assenza di massimi e minimi relativi**

Abbiamo osservato che g(x) ammette sia un minimo che un massimo assoluto che sono anche massimo e minimo relativo, accettando la definizione di estremo relativo che non esclude gli estremi dell'intervallo di definizione.

La funzione G(x) invece non ammette estremi assoluti nè relativi

In realtà quello che interessa sapere è che i valori di g(x) costituiscono una sequenza monotona decrescente e che il costo medio unitario diminuisce all'aumentare del numero di minuti di conversazione.

**PUNTO 2.**

Imponiamo $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{10}{x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{10}{x_0}\right)$

Poiché non esistono valori di $g(x)$ minori di $g(M)$ deve sussistere la relazione

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} > g\,(M) \rightarrow$$

$$g(x_0) = \frac{1}{10} + \frac{10}{x_0} > 2g(M) \rightarrow \frac{10}{x_0} > 2g(M) - 0{,}1 \cong 0{,}1 \rightarrow x_0 < 100$$

Da questa relazione si deduce che si può ottenere $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$ solo se $x_0 \leq 99$

Osserviamo cosa <<succede>> quando sono stati già utilizzati 99 minuti di conversazione.

| x | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 0,20417 | 0,20309 | 0,20204 | 0,20101 | 0,20000 | 0,19901 | 0,19804 | 0,19709 | 0,19615 | 0,19524 | 0,19434 |
| g(x)/2 | 0,10208 | 0,10155 | 0,10102 | 0,10051 | 0,10000 | 0,09950 | 0,09902 | 0,09854 | 0,09808 | 0,09762 | 0,09717 |

Al valore $x = 100$ corrisponde un valore di $g(x)$ uguale a $0{,}20$ e un valore di $\frac{g(x_0)}{2} = 0{,}10$ , che coincide con il costo medio variabile unitario ed è inferiore al minimo assoluto della nostra funzione.

Il costo medio, pertanto, può essere dimezzato solo se sono stati utilizzati al più 99 minuti di conversazione.

Risolvendo rispetto a $x_1$ si ricava:

$x_1 = \frac{200x_0}{100-x_0}$ con $x \in N \qquad 1 \le x_0 \le 99$

Il grafico di $x_1$ in funzione di $x_0$, in Fig.3,è costituto da una sequenza finita di punti appartenenti al grafico dell'iperbole equilatera di equazione

$$y = \frac{200\,x}{100 - x}$$

passante per l'origine degli assi e avente per asintoti le rette di equazione x = 100 e y= -200 .

**L'esistenza dell'asintoto verticale nell'iperbole non può che confermare quanto già osservato prima, cioè che** $1 \le x_0 < 100$ ma è poco significativo nel modello discreto.

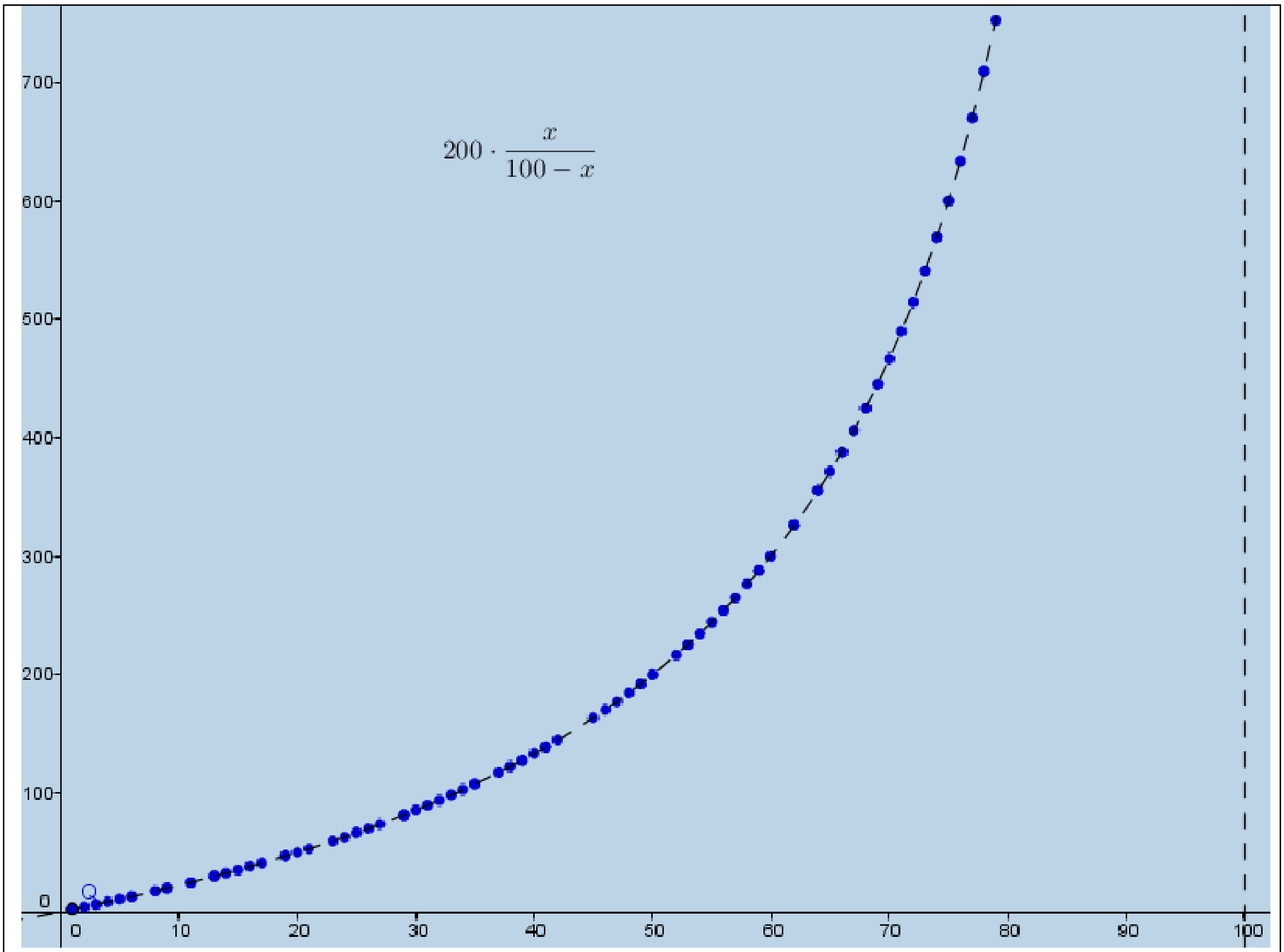


Fig.3

Supponiamo che il ricorso al modello continuo sia giustificato dalla necessità di esplorare cosa succede tra 99 e 100 e , assegnando valori reali alla variabile $x_0$, osserviamo che

$$\lim_{x_o \to 100^-} x_1 = +\infty \qquad \to \lim_{x_0 \to 100^-} g(x_1) = \frac{1}{10} \cong g(M) > 0{,}10$$

Se x si avvicina a 100 solo un valore <<infinitamente grande >> di $x_1$ potrebbe dimezzare il costo medio.

**OSSERVAZIONE**

*Sembrerebbe che il modello continuo sia più raffinato e fornisca ulteriori informazioni rispetto al modello discreto, invece , in effetti le ultime conclusioni non rispecchiano adeguatamente il contesto reale .*

*Abbiamo affermato che $g(100) = 0{,}20$ è un valore che non può essere dimezzato poichè non esiste alcun valore di x per cui $g(100) = 0{,}10$*

*Si suppone però che <<in pratica>> si possa accettare che l'uguaglianza sia valida in buona approssimazione.*

*Ricordando che* $g(43200) \cong 0{,}1002$ *differisce da 0,10 meno di* $10^{-3}$ *ci chiediamo se esistono valori di x, lontani dal valore limite, per cui g(x)* $\cong 0{,}10$ *con un'incertezza di 0,005 sulla terza cifra decimale , pertanto imponiamo*

$$\frac{10}{x} + 0{,}1 < 0{,}1 + 0{,}005 \rightarrow \frac{x}{10} > \frac{1}{0{,}005} \rightarrow x > 2000$$

*Dal valore x=2000 in poi si può affermare che g(x) )*$\cong 0{,}10$ *, quindi non è vero che* $x_1$ *debba essere infinitamente grande.*

| *x* | *2000* | *2001* | *2002* | *2003* | *2004* | *2005* | *2006* | *2007* | *2008* | *2009* | *2010* | *2013* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *g(x)* | *0,10500* | *0,10500* | *0,10500* | *0,10499* | *0,10499* | *0,10499* | *0,10499* | *0,10498* | *0,10498* | *0,10498* | *0,10498* | *0,10497* |

## PUNTO 3

La funzione polinomiale richiesta ha equazione del tipo :

y = ax$^2$ + bx + c

Poiché il suo grafico deve passare per i punti $A(0,2)\,, B(2,\frac{7}{2})\; e\; C(\,4{,}4)$ , i parametri a,b e c dovranno essere la soluzione del seguente sistema :

$$\begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b + c = \frac{7}{2} \\ 16a + 4b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

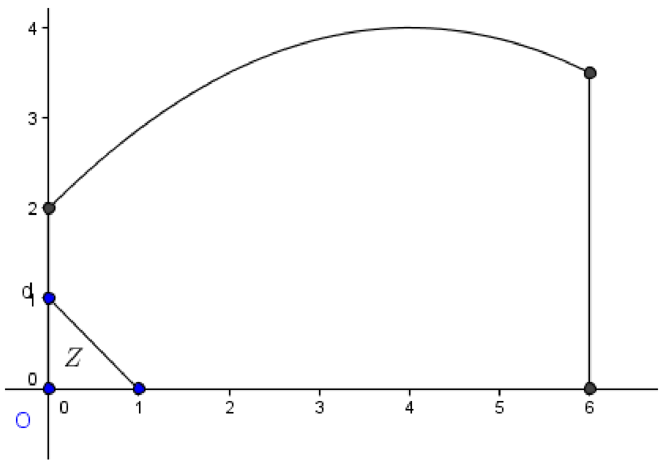



Fig.4

Quindi la funzione polinomiale ha equazione : $y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$.

La zona di cui ( in Fig. 4)si parla ha pertanto area uguale a :

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21$$

La porzione etichettata "Z" ha forma triangolare di area uguale a $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ e perciò l'area coperta dal servizio telefonico è : $21 - \frac{1}{2} = \frac{41}{2}$ ; essendo $\frac{\frac{41}{2}}{21} = \frac{41}{42} = 0{,}976 =$ circa il 98% dell'intera zona che rappresenta.

La percentuale di zona coperta dal segnale telefonico sembra essere stata sottostimata da parte dell'operatore telefonico

**PUNTO 4.**

La modifica del piano tariffario cambia la funzione spesa totale che ora diventa, per $x \in N$

$$f_1(x) = \begin{cases} 10 + \frac{1}{10}x & 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}(x - 500) & 500 < x \leq M \end{cases}$$

$$\boxed{\rightarrow f_1(x) = \begin{cases} 10 + \frac{1}{10}x & 0 \leq x \leq 500 \\ \frac{1}{5}x - 40 & 500 < x \leq M \end{cases} \qquad \textit{Modello } 3}$$

e di conseguenza cambia il costo medio che diventa

$$\boxed{g_1(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & 1 \leq x \leq 500 \\ \frac{1}{5} - \frac{40}{x} & x > 500 \end{cases} \qquad \text{Modello 4}}$$

Il testo si riferisce esplicitamente ad alcune caratteristiche , la derivabilità e la presenza di asintoti che, avendo adottato un modello discreto, vanno riferite alle curve che costituiscono un'approssimazione continua delle precedenti funzioni

La funzione

$$F_1(x) \quad = \begin{cases} 10 + \dfrac{1}{10}x & x \leq 500 \\ \dfrac{1}{5}x - 40 & x > 500 \end{cases}$$

è il prolungamento in R di $f_1(x)$

La funzione $G_1(x)$, approssimazione di $g_1(x)$ definita per x reale diverso da 0.

$$\boldsymbol{G_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} & \boldsymbol{x} < 0 \quad \cup \quad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{500} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \dfrac{\mathbf{40}}{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x} > 500 \end{cases}$$

**Studio di** $F_1(x)$ e di $f_1(x)$

$$F_1(x) \quad = \begin{cases} 10 + \dfrac{1}{10}x & x \leq 500 \\ \dfrac{1}{5}x - 40 & x > 500 \end{cases}$$

è continua e derivabile all'interno di ciascuno degli intervalli in cui

è definita ed è continua anche per x = 500 poiché

$$\lim_{x \to 500^+} \left(\frac{1}{5}x - 40\right) = \lim_{x \to 500^-} \left(10 + \frac{1}{10}x\right) = 60$$

Non è derivabile nello stesso punto in quanto

$$F_1{}'(x) \quad = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & x < 500 \\ \dfrac{1}{5} & x > 500 \end{cases}$$

Cioè per x = 500 abbiamo un punto angoloso.

I punti della funzione $f_1(x)$, il cui grafico è rappresentato in figura 5, appartengono, sempre con x intero

$$\begin{cases} alla\ retta\ di\ equazione & y = 10 + \frac{1}{10}x & 0 \le x \le 500 \\ alla\ retta\ di\ equazione & y = \frac{1}{5}x - 40 & 500 < x \le M \end{cases}$$

Le due rette si incontrano nel punto (500;60) e hanno pendenza diversa ma positiva per entrambe.

Questo comporta che la funzione è crescente in tutto il dominio in quanto , $\forall x_1, x_2 \quad \in [0; M]$ $, x_1 < x_2 \rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

La funzione però cresce linearmente solo in ciascuno dei due intervalli

$0 \le x < 500$ e $500 < x < M$

con tasso di crescita unitario uguale a 0,1 nel primo intervallo e 0,2 nel secondo.

Non si può parlare di tasso unitario costante in tutto il dominio.

La pendenza maggiore si ha per x>500: se l'utente supera i 500 minuti di conversazione , la spesa cresce più rapidamente.

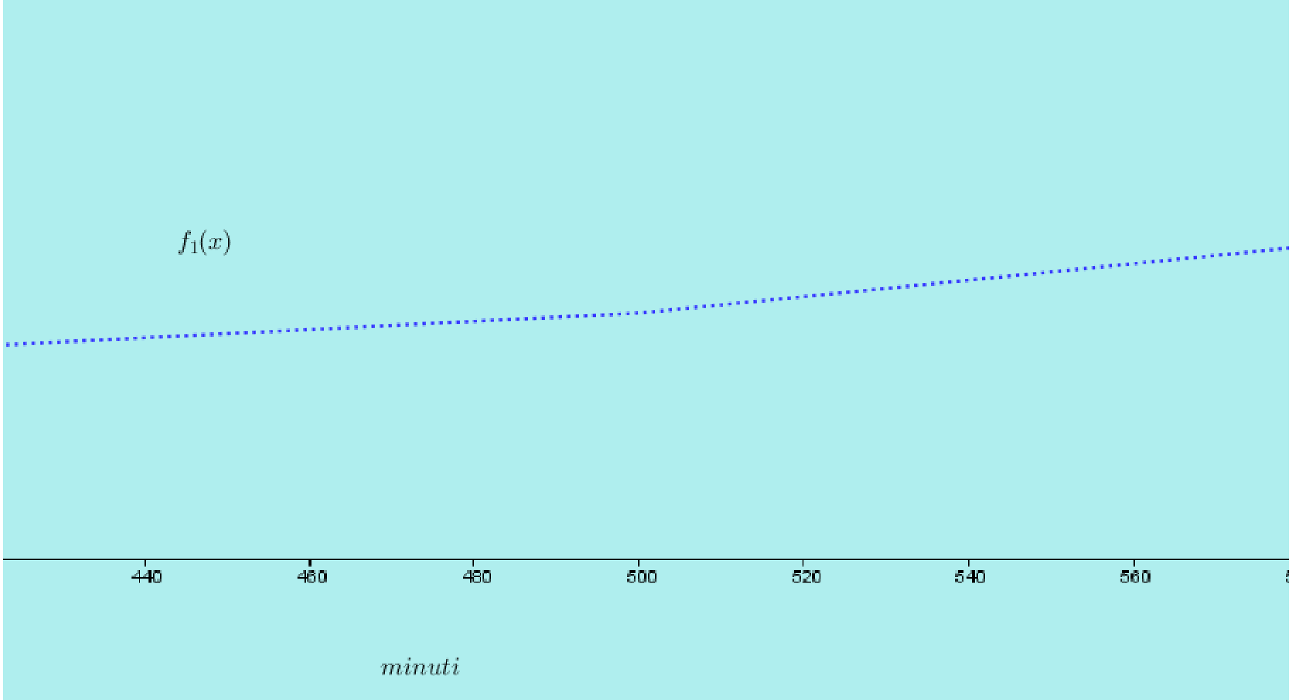



Fig.5

.

### Studio di $G_1(x)$

$$\boldsymbol{G_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{10}}{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} & \boldsymbol{x} < 0 \quad \cup \quad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{500} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \dfrac{\mathbf{40}}{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x} > 500 \end{cases}$$

$G_1(x)$ è somma di funzioni continue e derivabili all'interno di ciascuno degli intervalli in cui è stato suddiviso il dominio

Possiamo scrivere

$$G_1'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & x < 0 \quad \cup \quad 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & x > 500 \end{cases}$$

Nel punto di ascissa 500 la funzione è continua in quanto

$$\lim_{x \to 500^-} G_1(x) = \lim_{x \to +} G_1(x) = \frac{12}{100} = G_1(500)$$

ma non è ivi derivabile in quanto

$$\lim_{x \to 500^-} G'_1(x) = -\frac{10}{500^2} = -4 \cdot 10^{-5}$$

La derivata $G'_1(x)$ è negativa per $\boldsymbol{x} < 0 \quad \cup \quad \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{500}$ e positiva per x>500 , la funzione è decrescente nei primi due intervalli , crescente nel terzo.

Pertanto il punto di coordinate $\left(500, \frac{12}{100}\right)$ è minimo relativo

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \qquad \lim_{x\to o} \boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{x}) = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5} - \frac{40}{x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-}$$

$G_1\ (x)$ non ammette massimo assoluto mentre ha un minimo

assoluto nel punto di minimo relativo $\left(500; \frac{12}{100}\right)$ .

Il grafico di $\boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{x})$ è rappresentato in figura

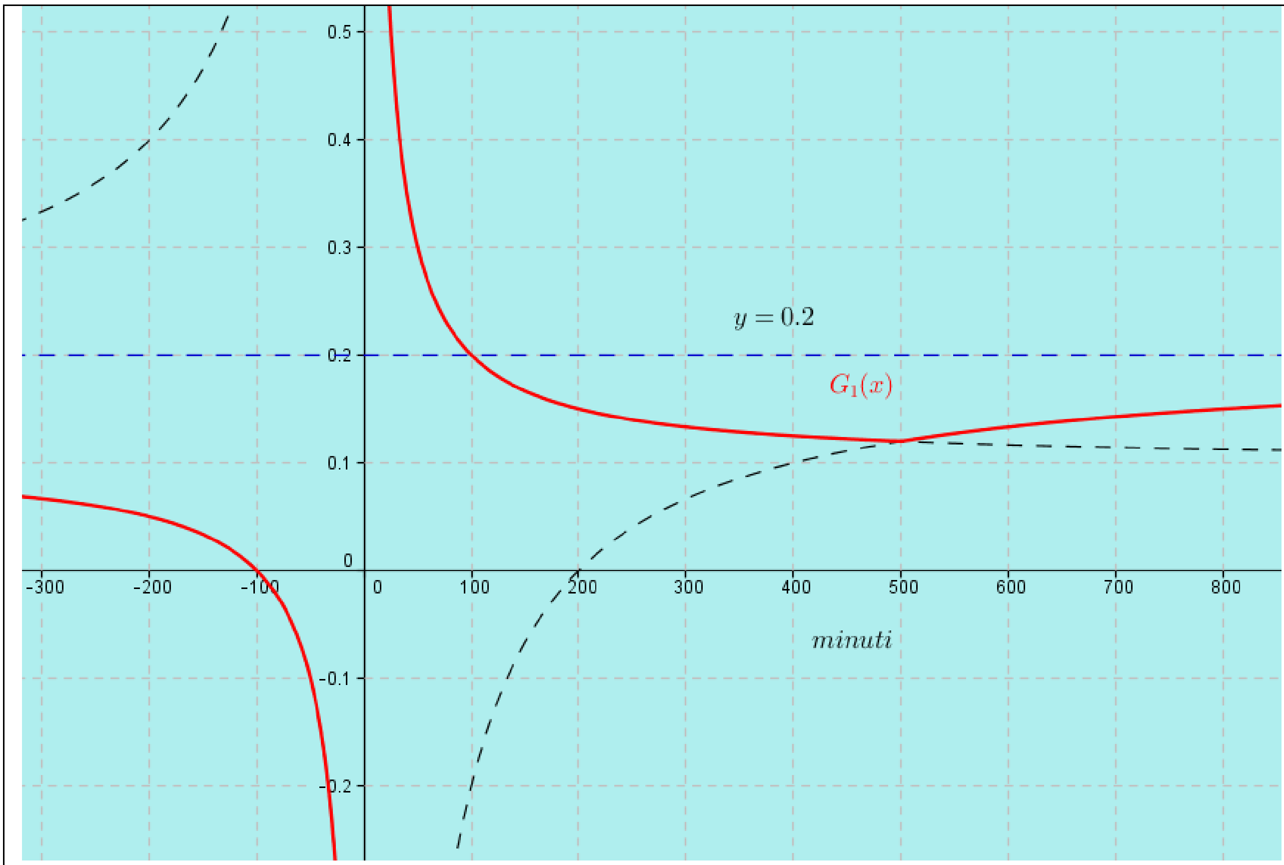


Fig.6

**Ricerca dei massimi e minimi assoluti di $G_1'(x\ )$**

La funzione $G_1'(x)$ ha un punto di discontinuità di prima specie per x=500.

Poiché

$$G_1''(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^3} & x < 0 \ \cup \quad 0 < x < 500 \\ -\dfrac{80}{x^3} & x > 500 \end{cases}$$

La funzione $G_1'(x)$ per

- x < 0 è decrescente
- 0 < x < 500 è crescente
- x>500 è decrescente.

Inoltre

$\lim_{x\to-\infty} G_1'(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{10}{x^2} = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} G_1'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{40}{x^2} = 0$

Poiché

$\lim_{x\to 0^-} G_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{10}{x^2} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} G_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{10}{x^2} = -\infty$

$\boldsymbol{G_1'(x)}$ non ha minimo assoluto poiché $\lim_{x\to 0} G_1'(x) = -\infty$

Non ha massimo assoluto.

Per ogni x del dominio risulta $\boldsymbol{G_1'(x)} < 16 \cdot 10^{-5}$ ma quest'ultimo non è un valore effettivamente assunto dalla funzione.

Il grafico di $G'(x)$, nell'intorno di x=500, è rappresentato in figura 7

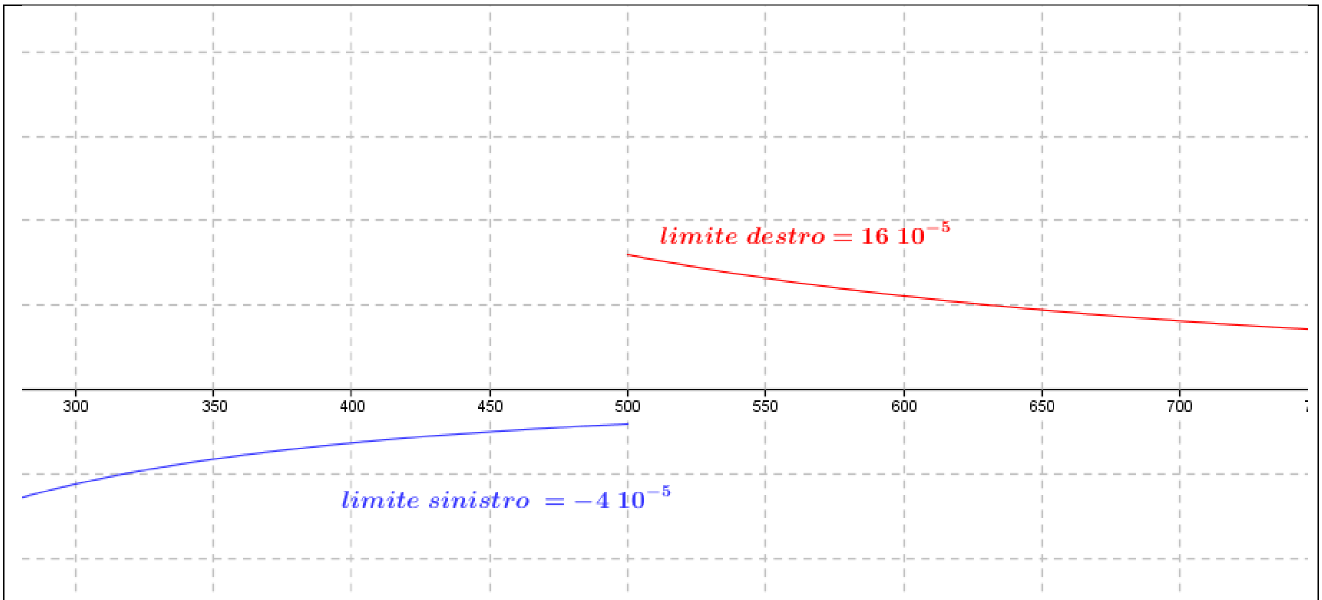


Fig.7

**Studio e grafico di** $\boldsymbol{g_1(x)}$

I punti della funzione $g_1(x)$, il cui grafico è in Fig.8, appartengono, sempre con x intero

$$\begin{cases} all'iperbole\ \ di\ equazione & y=\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{10} \quad 1\le\ x\le 500 \\ all'iperbole\ \ di\ equazione & y=\dfrac{1}{5}-\dfrac{40}{x} \quad 500<x\le M \end{cases}$$

La seconda iperbole ha per asintoto verticale l'asse delle y e per asintoto orizzontale la retta y=$\frac{1}{5}$

Le due iperboli si incontrano nel punto di coordinate $\left(500;\frac{12}{100}\right)$ che è il punto di minimo assoluto

La funzione $g_1(x)$ non è monotona, decresce a sinistra di x =500 e cresce a destra.

- Per $1\le\ x\le 500$ la funzione decresce dal valore $g_1(1)=1{,}10$ fino al valore $g_1(500)=0{,}12$
- Per $500<x\le M$ risulta sempre $g_1(x)<\frac{1}{5}=0{,}20$

- Il massimo assoluto è 1,10 euro e si ha per x=1
- Il minimo assoluto si ha per x=500 con $g_1(500) = 0{,}12\ euro$

Avendo osservato che quando x tende a +∞ $G_1(x)$ tende a 0,20 mentre la sua derivata, che ne indica la velocità di crescita, decresce tendendo a 0, possiamo affermare che per valori elevati di $x > 500$ $g_1(x)$ cresce ma la crescita è sempre più lenta e i suoi valori tendono a stabilizzarsi intorno al valore limite $\frac{1}{5} = 0{,}2$

Per $x = M$ $g_1(M) \cong 0{,}19907$, valore che differisce da 0,20 meno di $10^{-3}$

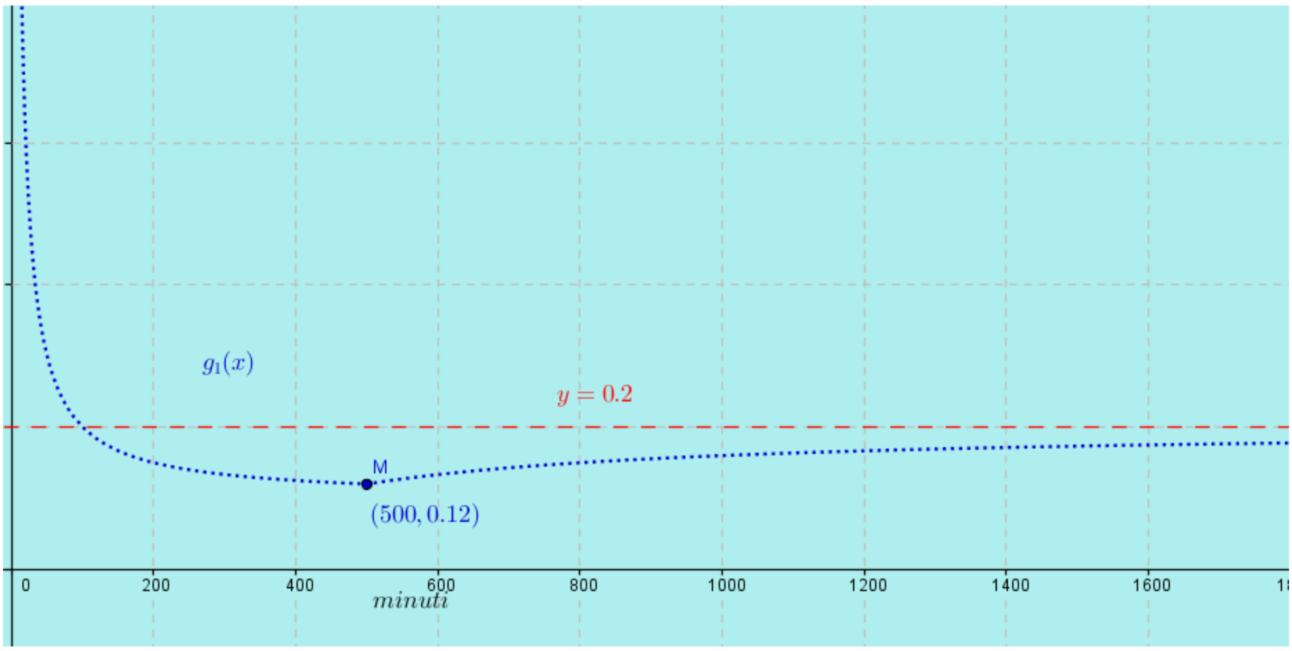


Fig.8

**Commento ai risultati**

La variazione del piano tariffario comporta un cambiamento della monotonia della funzione che rappresenta il costo medio unitario.

La funzione è decrescente per x<500 , poi è crescente , cioè il costo medio diminuisce fino x=500, poi riprende ad aumentare, a causa del sovrapprezzo. Il minimo del costo medio corrisponde a 500 minuti di conversazione.

Anche nel secondo piano tariffario se l'utente potesse usufruire del servizio telefonico per tutti i minuti contemplati in un mese, il canone fisso non avrebbe alcuna influenza sul costo medio che equivarrebbe alla media del costo variabile , cioè $0{,}2 \; euro \; al \; minuto$.