**PROBLEMA 2 – Scientifico-Scientifico Scienze applicate**

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico $\Gamma$, disegnato in figura 1. $\Gamma$ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

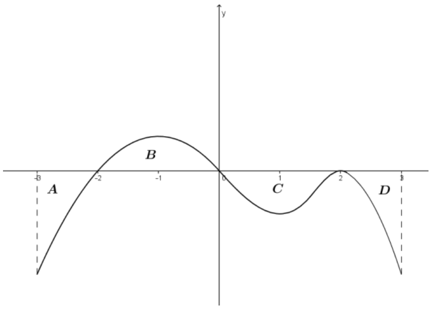


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di $x$ per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola g(0) e, se esiste, il $lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2\,x}$

4. Sia h(x) = 3 · f (2 x + 1) , determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$

## Soluzione

1. **La risposta può fermarsi al livello congetturale**.

   Poiché non si chiede di determinare il polinomio né quale sia effettivamente il suo grado minimo, la domanda può essere considerata a risposta aperta, lasciando spazio ad argomentazioni su diversi livelli di approfondimento.

Dalle informazioni del testo si evince che la derivata di f(x) ammette tre zeri, in corrispondenza dei tre punti a tangente orizzontale.

Se f(x) fosse esprimibile con un polinomio la sua derivata sarebbe una funzione polinomiale almeno di grado 3 e il grado di f(x) dovrebbe essere, pertanto, almeno 4.

Se ci si limita al conteggio delle possibili intersezioni di $\Gamma$ con una retta, dal grafico si evince, inoltre, che esistono rette che incontrano la curva in 4 punti reali , in particolare la curva ha con l'asse x quattro intersezioni, di cui due coincidenti nel punto di ascissa 2.

Questo potrebbe essere sufficiente per poter dire che se Γ è il grafico di un polinomio, questi non potrebbe che avere grado minimo 4 ma in realtà i dati forniti dalla traccia e quelli suggeriti dal grafico in figura consentono di imporre 10 condizioni e impostare un sistema di 10 equazioni nei 10 parametri di un polinomio di grado 9.

L'analisi delle condizioni e la verifica della loro indipendenza va comunque al di là delle finalità e del contesto in cui la traccia è stata formulata

2. **L'andamento di g(x) può essere dedotto dall'analisi del segno di $f(x) = g'(x)$**

-3 __________ −2 ________ -1 __________ 0 ________ 1 ________ 2 _________ 3

$f(x)$ - - - - - - - - - 0 +++++++++++++++++++- 0 - - - - - - - - - - - - -- 0- - - - - - -

$g(x)$

Soluzione di Adriana Lanza

In corrispondenza di x=0 si ha un massimo relativo .

La convessità di g(x) può essere dedotta dall'analisi del segno di $f'(x) = g''(x)$

La derivata di f(x) è positiva per i valori di x per cui $\Gamma$ è crescente, è negativa per i valori di x per cui è decrescente

-3 __________ ____-1__________ 0 ________1________ 2_________3

$f'(x)$ ++++++++++++++++ - - - - - - - - - - - - - - - - - - -+++++++++- - - - - - - -

$g(x)$ volge la concavità verso l'alto negli intervalli $-3 < x < -1 \quad \cup \quad 1 < x < 2$

**3.**Essendo f(x) derivabile, quindi continua, in [-3;3] ed essendo $g(x)$ una primitiva di f(x) , sussiste la relazione

$$\int_0^3 f(x)dx = g(3) - g(0)$$

Poiché $\int_0^2 f(x)dx$ equivale all'opposto dell'area della regione C e analogamente $\int_2^3 f(x)dx$ all'opposto dell'area della regione D possiamo porre

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = g(3) - g(0) \rightarrow$$

$$-3 - 1 = -4 = g(3) - g(0) \rightarrow$$

$$g(0) = g(3) + 4 = -5 + 4 = -1$$

Questo risultato comporta che

$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+1}{2x}$ si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$

Poiché sia la funzione che sta al numeratore, sia quella che sta al denominatore sono derivabili nell'intorno di 0, si può applicare il Teorema di *De L'Hôpital*

Poiché il limite del rapporto delle derivate

$\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} = 0$ esiste anche $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+1}{2x}$ e il suo valore è 0.

4. $\int_{-2}^{1} h(x)dx = 3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx$

effettuando la sostituzione $z = 2x + 1 \rightarrow dx = \frac{1}{2}\,dz$

si ottiene, tenendo conto delle aree delle regioni A, B, C, D,

$$\frac{3}{2}\int_{-3}^{3} \mathbf{f(z)dz} = \frac{3}{2}(-2 + 3 - 3 - 1) = -\frac{9}{2}$$

***E' possibile dare un'interpretazione geometrica dei risultati.***

La funzione $h(x) = 3f(2x+1)$, si ottiene da f(x) applicando alla funzione f(x) la segue trasformazione di coordinate

Soluzione di Adriana Lanza

$$\begin{cases} x = & 2x' + 1 \\ y = & \frac{1}{3}\,y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = & \frac{x-1}{2} \\ y' = & 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = & \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ y' = & 3y \end{cases}$$

Si tratta di una trasformazione lineare invertibile o affinità

La suddetta trasformazione applica alle ascisse una traslazione del vettore $\vec{v}(1;0)$ seguita da una contrazione di fattore $\frac{1}{2}$, mentre alle ordinate applica una dilatazione di un fattore 3.

Il rapporto $\frac{S'}{S}$ delle aree delle figure piane corrispondenti è costante ed è uguale a $\frac{3}{2}$, cioé al valore del determinante della matrice della trasformazione

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

Poiché

$P(-3;0)$ corrisponde a $P'(-2;0)$

$Q(3;0)$ corrisponde a $Q'(1;0)$

l'intervallo $-3 \leq x \leq 3$ è trasformato nell'intervallo $-2 \leq x \leq 1$

Le quattro regioni di piano A', B', C',D', corrispondenti di A,B,C,D, saranno uguali, rispettivamente a

$$\frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \quad , \quad \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}, \quad \frac{3}{2} 3 = \frac{9}{2}, \quad \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

La loro posizione, rispetto all'asse delle x, resta immutata.

Pertanto $\int_{-2}^{1} h(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(x)dx = -3 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$

Soluzione di Adriana Lanza