PROBLEMA 2-Suppletiva

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con\ x \in \Re, 0 \leq x \leq k^2, k \in \Re, k > 0$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1. In un riferimento cartesiano *Oxy*, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore $\frac{64\pi}{192}$;
2. calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;
3. assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_s del baricentro in funzione del parametro
k, sapendo che vale:

$$x_s = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione *a* e *b* vanno scelti opportunamente, e *V* indica il volume del solido di rotazione;

4. all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

SOLUZIONE

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con\ x \in \Re, 0 \leq x \leq k^2, k \in \Re, k > 0$$

ammette due zeri reali : x=0 e x $= k^2 > 0$

Studio della derivata prima $f'_k(x)$

$$f'_k(x) = \frac{1}{4k}\left(\sqrt{k^2 - x} - \frac{x}{2\sqrt{k^2 - x}}\right) = \frac{2k^2 - 3x}{8k\sqrt{k^2 - x}}$$

$f'_k(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}k^2$ $\quad$ $f'_k(x) > 0$ per $0 < x < \frac{2}{3}k^2$ $\quad$ $f'_k(x) < 0$ per $\frac{2}{3}k^2 < x < k^2$

$\lim_{x \to k^2} f'_k(x) = -\infty$

0______________________$\frac{2}{3}k^2$_________k^2

$f'_k(x)$ +++++++++++++++++++++++-----------------

$f_k(x)$ $\nearrow$ $\searrow$

$f_k(x)$ è *crescente* per $0 < x < \frac{2}{3}k^2$, è *decrescente* per $\frac{2}{3}k^2 < x < k^2$

Il punto di coordinate $\left(\frac{2}{3}k^2 ; \frac{k^2\sqrt{3}}{18}\right)$ è punto di Massimo relativo e assoluto

Il punto di coordinate $\left(k^2 ; 0\right)$ è punto a tangente verticale

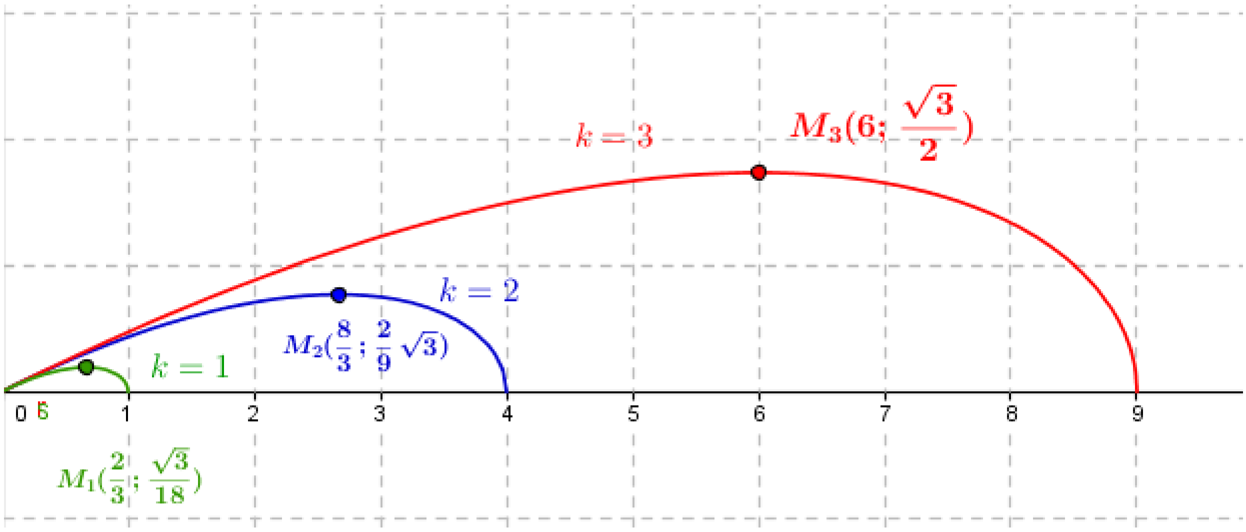
Studio della derivata seconda $f''_k(x)$

$$f''_k(x) = \frac{1}{8k}\,\frac{-3\sqrt{k^2-x}+\dfrac{(2k^2-3x)}{2\sqrt{k^2-x}}}{k^2-x} = \frac{-4k^2+3x}{16k\sqrt{(k^2-x)^3}}$$

0_________________________________k^2 ……………………..$\frac{4}{3}k^2$

$f''_k(x)$ --

La derivata seconda è negativa in tutto l'intervallo di definizione di $f_k(x)$, il cui grafico, pertanto volge sempre la concavità verso il basso.



Il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione di piano limitata dal grafico di $f_k(x)$ e dall'asse x è uguale a

$$V(k) = \pi\int_0^{k^2} f_k(x)^2\,dx = \frac{\pi}{16k^2}\int_0^{k^2}(k^2x^2-x^3)\,dx = \frac{\pi}{16k^2}\left[\frac{k^2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{k^2} = \frac{\pi}{192}k^6$$

Imponendo

$$\frac{\pi}{192}k^6 = \frac{64\pi}{192}$$

si trova k=2

2. Il diametro massimo di ciascun solido di rotazione è uguale al doppio dell'ordinata del punto di massimo di $f_k(x)$, ovvero $\text{diametro massimo} = \frac{k^2\sqrt{3}}{9}$

Soluzione di Adriana Lanza

Il coefficiente angolare della retta tangente nell'origine al grafico di $f_k(x)$ non dipende da k ed è uguale a $f'_k(0) = \frac{1}{4} = \tan\alpha$ dove α è l'ampiezza dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x.

Il valore di $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{4} \cong 0{,}24$ radianti che corrisponde a circa $14°2'$

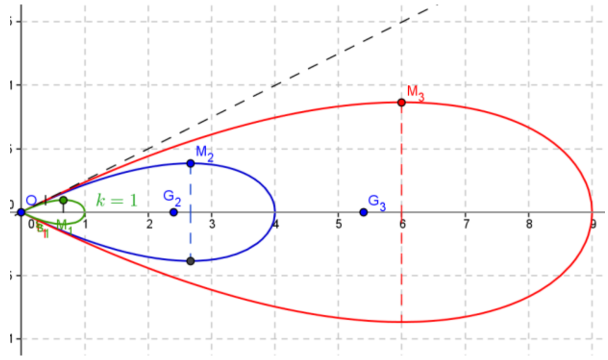
3. L'ascissa del baricentro G_k è

$$x_S = \frac{\pi\int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V} = \frac{\frac{\pi}{16k^2}\int_0^{k^2} x\left(k^2x^2 - x^3\right)dx}{V}$$

poiché

$$\int_0^{k^2} x(k^2x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{k^2}{4}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^{k^2} = \frac{k^{10}}{20}$$

$$x_S = \frac{\pi}{16k^2}\frac{k^{10}}{20}\frac{1}{V} = \frac{\pi k^8}{320}\frac{192}{\pi k^6} = \frac{3}{5}k^2$$



4.

La richiesta del testo è molto generica , non è specificata la natura del cilindro ,né la sua posizione all'interno del solido.

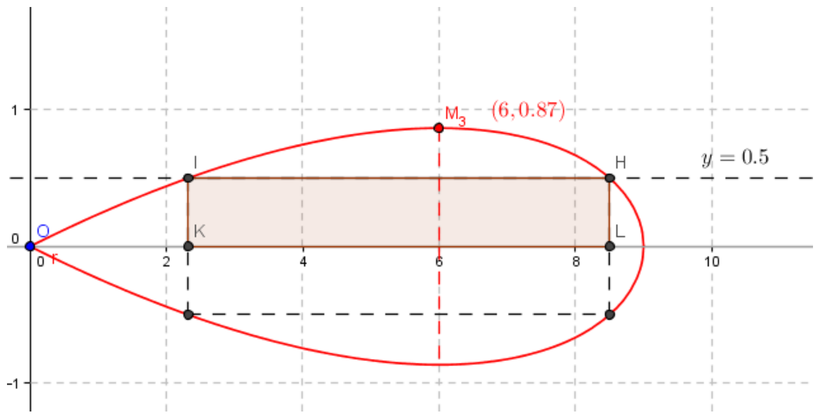
Cominciamo a verificare se è possibile inscrivere nel solido un cilindro circolare retto di raggio 0,5, generato dalla rotazione,intorno all'asse x, di un rettangolo avente due vertici sul grafico di $f_3(x)$, come in figura.

Essendo il valore 0,5 compreso tra il minimo e il massimo della funzione $f_3(x)$, esiste almeno un valore di x appartenente al dominio, tale che $f_3(x) = 0{,}5$.

Essendo $f_3(x)$ monotona crescente per $0 < x < 6$ e monotona decrescente per $6 < x < 9$ esistono due valori di x

$0 < x_1 < 6$ e $6 < x_2 < 9$ tali che $f_3(x_1) = f_3(x_2) = 0{,}5$

Per determinare un valore approssimato di x_1 e x_2 determiniamo gli intervalli in cui cambia segno l'espressione $f_3(x) - 0{,}5$



Soluzione di Adriana Lanza

x1	x2	f_3(x1)-0,5	f_3(x2)-0,5
0	6	-0,5	0,366025
0,5	6,5	-0,37852	0,35645
1	7	-0,2643	0,324958
1,5	7,5	-0,15767	0,265466
2	8	-0,05904	0,166667
2,5	8,5	0,031148	0,000867
3	9	0,112372	-0,5

Dai risultati riportati nella tabella si evince che $2 < x_1 < 2{,}5$ e $8{,}5 < x_2 < 9$

pertanto $x_2 - x_1 > 6$

Il rettangolo ISS'I', di dimensioni 0,5 e 6, genera, in una rotazione intorno all'asse x, un cilindro di raggio 0,5 e altezza 6, interno al solido di rotazione generato dal grafico di $f3\,(x)$.