Quesito 4

Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

è soluzione?

$$y'' + 2\,\frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x\,y'' = 1$$

$$x\,y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2\,y'' + x\,y' + \frac{2}{x} = y$$

Soluzione

La funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ è derivabile due volte per x>0.

Per verificare di quale equazione differenziale essa è soluzione calcoliamo

$y'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ e $y"(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

e sostituiamo le loro espressioni in ciascuna delle equazioni

a) **Prima equazione**

$$y" + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

Poiché

$$\frac{-3+2\ln x}{x^3} + 2\frac{1-\ln x}{x^3} = \frac{-1}{x^3} \neq \frac{\ln x}{x}$$

la prima equazione non è soddisfatta

Soluzione di Adriana Lanza

b) Seconda equazione

$$\boldsymbol{y' + x \cdot y" = 1}$$

Poiché

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{-3 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-2 + \ln x}{x^2} \neq 1$$

la seconda equazione non è soddisfatta

c) Terza equazione

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

Poiché

$$x \cdot y' = \frac{1 - \ln x}{x} \quad mentre \ \frac{1}{x} + y = \frac{1 + \ln x}{x}$$

la terza equazione non è soddisfatta

A questo punto , se il testo assicura che $y = \frac{\ln x}{x}$ *è soluzione di una delle equazioni proposte, per esclusione, questa non può che essere la quarta.*

Facciamo comunque la verifica diretta

d) Quarta equazione

$x^2 \cdot y" + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$

Poiché

$\frac{-3+2\ln x}{x} + \frac{1-\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x}{x} = y \quad \forall\, x > 0$

la funzione $y = \frac{\ln x}{x}$ è soluzione della quarta equazione differenziale