Dov'è l'asintoto?

Punto 2.

Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Soluzione mediante il modello discreto

Se $1 \leq x_0 \leq 43200$

imponiamo $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$

Essendo $g(x) = \frac{1}{10} + \frac{10}{x}$ decrescente deve essere

$$x_0 < x_1 \leq 43200$$

Risolvendo rispetto alla variabile x_1 troviamo

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

Poiché non esistono valori di $g(x)$ minori di $g(43200) \cong 0{,}1002$

sussistono le relazioni

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} > g\,(43200) \qquad \rightarrow \quad g(x_0) > 2\,g(43200) \ \rightarrow$$

$$\frac{10}{x_0} > 2\,g(43200) - 0{,}10 \cong 0{,}10 \ (\,approssimazione\ per\ difetto)$$

$$\frac{10}{x_0} > 0{,}10 \quad \rightarrow \quad x_0 < 100$$

Da questa relazione si deduce che si può ottenere

$$\boxed{g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \qquad solo\ se \quad x_0 \le 99}$$

Osserviamo cosa <<succede>> quando sono stati già utilizzati 99 minuti di conversazione.

x	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
g(x)	0,20417	0,20309	0,20204	0,20101	0,20000	0,19901	0,19804	0,19709	0,19615	0,19524	0,19434
g(x)/2	0,10208	0,10155	0,10102	0,10051	0,10000	0,09950	0,09902	0,09854	0,09808	0,09762	0,09717

Al valore $x = 100$ corrisponde un valore di $g(x)$ uguale a $0{,}20$ e un valore di $\frac{g(x_0)}{2} = 0{,}10$, che coincide con il costo medio variabile unitario ed è inferiore al minimo assoluto della nostra funzione.

Il costo medio, pertanto, può essere dimezzato solo se sono stati utilizzati al più 99 minuti di conversazione.

Non abbiamo ovviamente incontrato nessun asintoto .

Il testo si riferisce ad un modello continuo, non obbligatorio

Supponiamo che il ricorso al modello continuo sia giustificato dalla necessità di esplorare cosa succede tra 99 e 100.

Consideriamo relazione funzionale tra x_1 e x_0

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

e osserviamo che

si può far tendere x_0 al valore 100 solo nell'intorno sinistro, poiché nell'intorno destro x_1 avrebbe valore negativo.

Si deduce che deve essere $x_0 < 100$

Poiché $\quad \lim_{x_0 \to 100^-} \frac{200x_0}{100-x_0} = +\infty \quad \rightarrow$

$$\lim_{x_o \to 100^-} x_1 = +\infty$$

Essendo $g(100) = 0{,}20$ e ricordando che

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^+ \to g(x) > 0{,}10 \quad \forall x$$

Se x si avvicina a 100 solo un valore <<infinitamente grande >> di x_1 potrebbe dimezzare il costo medio.

Sembrerebbe quindi che il modello continuo sia più raffinato e fornisca ulteriori informazioni rispetto al modello discreto, invece , in effetti le ultime conclusioni non rispecchiano adeguatamente il contesto reale .

a) Prima osservazione
Abbiamo affermato che $g(100) = 0{,}20$ è un valore che non può essere dimezzato poichè non esiste alcun valore di x per cui $g(100) = 0{,}10$

Si suppone però che <<in pratica>> si possa accettare che l'uguaglianza sia valida in buona approssimazione.

Ricordando che $g(43200) \cong 0{,}1002$ differisce da 0,10 meno di 10^{-3} ci chiediamo se esistono valori di x, lontani dal valore limite, per cui g(x) $\cong 0{,}10$ con un'incertezza di 0,005 sulla terza cifra decimale , pertanto imponiamo

$$\frac{10}{x} + 0{,}1 < 0{,}1 + 0{,}005 \to \frac{x}{10} > \frac{1}{0{,}005} \to x > 2000$$

Dal valore x=2000 in poi si può affermare che g(x))$\cong 0{,}10$, quindi non è vero che x_1 debba essere infinitamente grande.

x	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2013
g(x)	0,10500	0,10500	0,10500	0,10499	0,10499	0,10499	0,10499	0,10498	0,10498	0,10498	0,10498	0,10497

b) Seconda osservazione

Abbiamo visto che, se si assegnano valori reali a x , f(x) è in effetti una funzione costante a tratti, poiché i valori della spesa devono essere necessariamente approssimati al centesimo di euro.

Per il valore del costo medio potremmo anche accettare valori non realistici in quanto non rappresentano importi da pagare concretamente.

E' lecito chiedersi comunque come andrebbero modificati i risultati della tabella precedente se effettuiamo gli arrotondamenti.

Ci aspettiamo che anche valori di x >100 , possano essere accettati purché risulti

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} > 0{,}10 - 0{,}005 \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{10}{x_0} + 0{,}10\right) \rightarrow \frac{10}{x_0} > 0{,}09 \rightarrow$$

$$x_0 > 111{,}11$$

x	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
g(x)	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
g(x)/2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,09

Possiamo dire che l’asintoto <<si sposta>> al valore 111.

Ovviamente queste considerazioni sarebbero significative se fosse specificata la <<situazione reale>> e se i risultati servissero a dare una risposta a un preciso problema