Quesito 7

Data la funzione

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$,

dopo aver determinato il campo di esistenza ricerca l'eventuale asintoto verticale.

Soluzione

La funzione è definita e continua nell'intervallo x>0.

L'eventuale asintoto verticale dovrebbe coincidere con la retta di equazione $x = 0$, qualora $f(x)$tendesse a ∞ quando x tende a 0 da destra.

Consideriamo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ che si presenta nella forma di indecisione $0 \cdot \infty$.

Il prodotto $x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ può essere scritto come rapporto di due infiniti

$$\frac{\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

Poiché la funzione $\ln x$ per x $\rightarrow 0^+$, è infinita di ordine inferiore a qualunque potenza di 1/x,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0 \ ,$$

quindi $f(x)$ non ammette asintoto verticale

Allo stesso risultato si perviene applicando il teorema di De L'Hôpital:

- le due funzioni $\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{1}{x^2}$ sono derivabili in un intorno destro di 0 e la derivata di $\frac{1}{x^2}$ è diversa da 0
- il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

soluzione di Adriana Lanza