Quesito 8

Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione: $y = sen\ 2x$

e generalizza il risultato per $y = sen\ 2x$ con n € N.

Soluzione

La derivata prima $f'(x)$ della funzione $f(x)$ è, per definizione, se esiste ed è finito,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivata di $y = sen\ 2x \ \rightarrow y'(x) = 2\cos(2x)$

Infatti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ 2(x + \Delta x) - sen(2x)}{\Delta x}$$

applicando la formula di prostaferesi

$$sen\ p - sen\ q = 2\ sen\ \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

diventa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\ \frac{2\Delta x}{2} \cos \frac{4x + 2\Delta x}{2}}{\Delta x} \ 0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\ \Delta x\ \cos(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2\cos(2x)$$

essendo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \Delta x}{\Delta x} = 1$ $\qquad \lim_{\Delta x \to 0} \cos(2x + \Delta x) = \cos(2x)$

Il risultato si può generalizzare per $y = sen\ 2x$ con n € N

Derivata di $y = sen\ nx \quad \rightarrow y'(x) = \ n\ \cos(nx)$

Infatti la dimostrazione è analoga a quella del caso precedente; basta sostituire il fattore $<< 2 >>$ con il fattore $<< n >>$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\ \frac{n\Delta x}{2} \cos \frac{2nx + n\Delta x}{2}}{\Delta x} \ 0 = \ = n\cos(nx)$$

essendo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\ \frac{n\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{n}{2}$ $\qquad \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2nx + n\Delta x}{2}\right) = \cos(nx)$

soluzione di Adriana Lanza