Quesito 5

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

Soluzione

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'esistenza di un asintoto obliquo, è che risulti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Poiché $\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ otteniamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \infty$$

L' asintoto obliquo esiste ed è del tipo : y = mx + q, se esistono finiti i due limiti seguenti che forniscono i valori di m e di q:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathrm{m} \qquad \lim_{x\to\infty} [\mathrm{f(x) - mx}] = \mathrm{q}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} [\mathrm{f(x) - mx}] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1} - \frac{1}{2}\mathrm{x}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x - x2^{\frac{1}{x}}}{2\left(2^{\frac{1}{x}} + 1\right)}\right]$$

Osserviamo che il denominatore tende a $\frac{1}{4}$

Il numeratore si presenta come una forma di indecisione del tipo $\infty - \infty$ che può essere trasformata

in una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, osservando che

$$x - x2^{\frac{1}{x}} = \mathrm{x}\left(1 - 2^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\mathrm{x}}}$$

Con il cambio di variabile $\frac{1}{x} = \mathrm{z}$ otteniamo $\lim_{z\to 0} \left[\frac{1}{2(2^z+ +1)} \frac{1-2^z}{z}\right] = -\frac{1}{4}\ln 2 \cong -0{,}17$,

sapendo che $\lim_{z\to 0} \left[\frac{a^z-1}{z}\right] = \ln \mathrm{a}$ (limite notevole)

soluzione di Adriana Lanza

Pertanto $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = -\frac{1}{4}\ln 2 = q$

L'asintoto obliquo ha equazione

$y = \frac{1}{2}x + -\frac{1}{4}\ln 2$