

Quesito 5

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

Soluzione

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'esistenza di un asintoto obliquo, è che risulti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \infty$$

L'asintoto obliquo esiste ed è del tipo : $y = mx + q$, se esistono finiti i due limiti seguenti che forniscono i valori di m e di q :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1} - \frac{1}{2}x \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x - x2^{\frac{1}{x}}}{2 \left(2^{\frac{1}{x}} + 1 \right)} \right]$$

Osserviamo che il denominatore tende a $\frac{1}{4}$

Il numeratore si presenta come una forma di indecisione del tipo $\infty - \infty$ che può essere trasformata

in una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, osservando che

$$x - x2^{\frac{1}{x}} = x \left(1 - 2^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

Con il cambio di variabile $\frac{1}{x} = z$ otteniamo $\lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2(2^z + 1)} \frac{1 - 2^z}{z} \right] = -\frac{1}{4} \ln 2 \cong -0,17$,

sapendo che $\lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{a^z - 1}{z} \right] = \ln a$ (limite notevole)

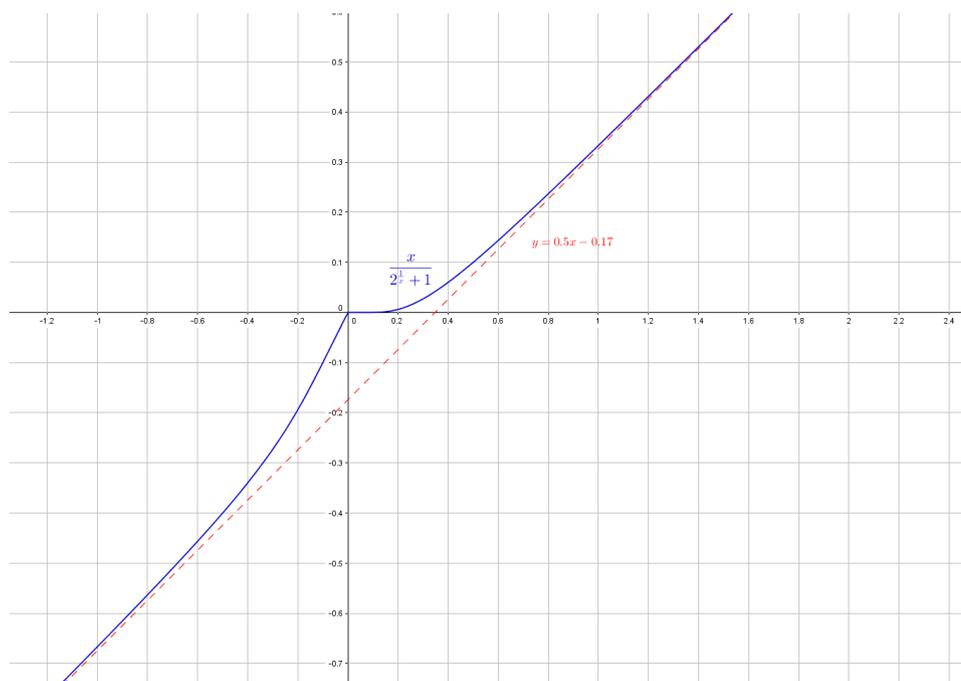
soluzione di Adriana Lanza

Simulazione 10 dicembre

$$\text{Pertanto } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = -\frac{1}{4} \ln 2 = q$$

L'asintoto obliquo ha equazione

$$y = \frac{1}{2}x + -\frac{1}{4} \ln 2$$



soluzione di Adriana Lanza