PROBLEMA 1: Il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto:

ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe. Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo:

1. Scelto un riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:

$$y = e^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2$$

$$y = \frac{sin^2(ax+b) + cos^2(ax+b)}{cx+d}$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri a, b, c, e d in base alle dimensioni definite dall'artigiano;
3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.
   L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;
   4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

SOLUZIONE

1. La funzione f(x) deve avere uno zero in corrispondenza di x=3

Osserviamo che la prima e la seconda funzione non ammettono zeri per nessun valore di x

Infatti la prima

$$y = e^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2$$

(qualunque siano i valori dei parametri a,b,c,d)è una somma di due termini di cui il primo è positivo per qualunque valore di x e il secondo non è mai negativo.

La seconda funzione

$$y = \frac{sin^2(ax+b)+cos^2(ax+b)}{cx+d} = \frac{1}{cx+d}$$

corrisponde ad una frazione algebrica il cui numeratore non è mai nullo

La terza è una funzione polinomiale e può assumere valore 0 per x=3, assegnando un valore opportuno ai parametri a,b,c,d.

2. Per determinare i parametri dobbiamo analizzare le condizioni fornite dal testo.

Il passaggio per i quattro punti

$$(0; 0{,}4) \;\; (1; 0{,}8) \;\; (2; 1{,}2) \;\; (3; 0)$$

fornisce 4 condizioni indipendenti .

Il testo fornisce anche l'informazione " a 10 cm da questo estremo la sagoma flette" che potrebbe essere interpretata come la presenza di un flesso nel punto di ascissa 1

Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} f(0) = 0{,}4 \\ f(1) = 0{,}8 \\ f(2) = 1{,}2 \\ f(3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0{,}4 \\ a+b+c+d = 0{,}8 \\ 8a+4b+2c+d = 1{,}2 \\ 27a+9b+3c+d = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Il sistema ammette la seguente soluzione

$$\begin{cases} a = -\dfrac{4}{15} \\ b = \dfrac{4}{5} \\ c = -\dfrac{2}{15} \\ d = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Se consideriamo , invece la condizione della presenza di un flesso, cioè di un punto che annulla la derivata seconda (trattandosi di un funzione derivabile due volte) possiamo sostituire una delle quattro equazioni , con l'equazione $f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \rightarrow b = -3a$

e scrivere, per esempio,

$$\begin{cases} d = 0{,}4 \\ a+b+c+d = 0{,}8 \\ b = -3a \\ 27a+9b+3c+d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0{,}4 \\ -2a+c+0{,}4 = 0{,}8 \\ b = -3a \\ 3c+0{,}4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ -2a = \frac{8}{15} \\ b = -3a \\ c = -\frac{2}{15} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ a = -\frac{4}{15} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

ritrovando gli stessi risultati

Pertanto la funzione che rappresenta il profilo del contenitore è

$y = f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5}$ con $0 \le x \le 3$

3.

Studio della funzione

Sappiamo che $f(0) = \frac{2}{5}$ e $f(3) = 0$ e ci aspettiamo che f(x) non assuma valori negativi nell'intervallo di definizione.

Verifichiamo se f(x) ammette ulteriori zeri reali oltre x=3.

Scriviamo f(x) nella forma $\frac{-4x^3+12x^2-2x+6}{15}$

Il numeratore può essere fattorizzato

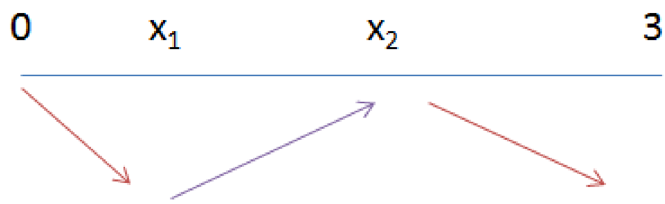
$$-4x^3 + 12x^2 - 2x + 6 = -4x^2(x-3) - 2(x-3) = -2(x-3)(2x^2+1)$$

Poiché il fattore $2x^2 + 1$ assume solo valori positivi possiamo affermare che f(x) assume valori positivi per $0 \le x < 3$.

La derivata $f'(x) = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{2}{15}$ si annulla per $x_1 = \frac{6-\sqrt{30}}{6} \cong 0{,}09$ e $x_2 = \frac{6+\sqrt{30}}{6} \cong 1{,}91$

ed è positiva per i valori di x compresi tra i due zeri

Monotonia di f(x)



Il punto di ascissa x_1 è minimo relativo e il punto di ascissa x_2 è massimo relativo

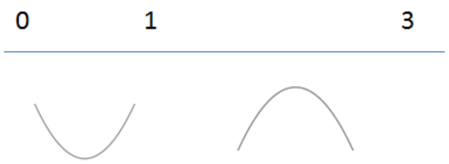
Le rispettive ordinate sono

$f(x_1) = \frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{30}}{27} \cong 0{,}39$ $\qquad$ $f(x_2) = \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{27} \cong 1{,}20$

Poiché $f(x_2) > f(0)$ il massimo relativo $M\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}; \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{30}}{27}\right)$ è anche massimo assoluto .

La derivata seconda $f''(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}$ si annulla per $x = 1$

Concavità e convessità della curva



Il punto F $\left(1; \frac{4}{5}\right)$ è punto di flesso, come era già noto.

Grafico (Figura1)

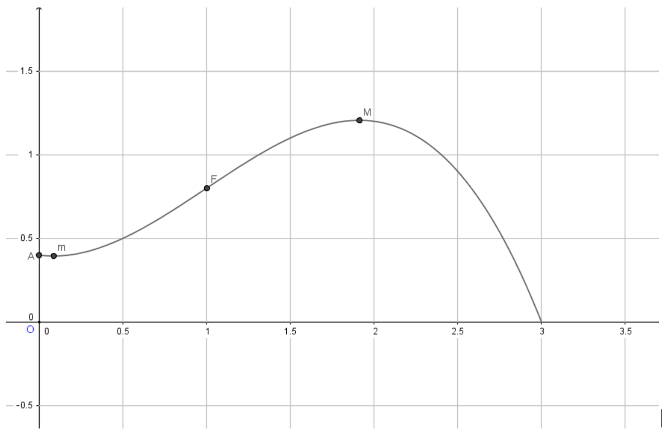


Figura 1

Poiché la massima altezza del profilo è di circa 12 cm, il contenitore non può essere utilizzato per una scarpa alta 14 cm.

4. Il costo di produzione espresso in euro, indicando con n il numeri di pezzi prodotti, è uguale a
$$S(x) = 500 + 5n$$
Il ricavo, in euro, è uguale a 15n
Il rapporto ricavo/costo è uguale a $R(n) = \frac{15n}{500+5n} = \frac{3n}{100+n}$ con $n \in N$

I valori di $R(n)$ costituiscono una successione

I punti del suo grafico appartengono ad una iperbole equilatera (Figura 2) di equazione $y = \frac{3x}{100+x}$ avente per asintoto verticale la retta di equazione $x = -100$ e per asintoto orizzontale la retta di equazione

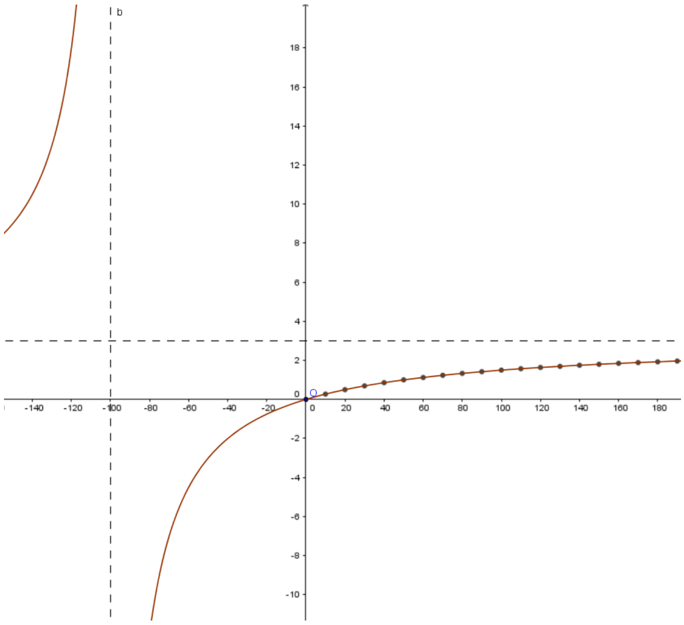
$y = 3$

Infatti

$$\lim_{x \to -100^-} \frac{3x}{100 + x} = -\infty \qquad \lim_{x \to -100^+} \frac{3x}{100 + x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{100 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{100 + x} = 3$$

Figura 2



Il rapporto ricavo/costo cresce sempre ma non supera, nè raggiunge il valore 3.