PROBLEMA 2: Il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione.

All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3 , che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi. Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;

2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (Ta = temperatura ambiente, Tg = temperatura iniziale del ghiaccio, T(t) = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = \left(T_g - T_a\right)e^{-kt}$$

$$T(t) = \left(T_a - T_g\right)\left(1 - e^{-kt}\right) + T_g$$

$$T(t) = \left(T_a - T_g\right)e^{-kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro k, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm;

4. **sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.**

SOLUZIONE

1. Si suppone che il flusso di calore tra il blocco di ghiaccio e l'ambiente esterno avvenga nelle tre direzioni spaziali e che sia proporzionale alla superficie di scambio termico.

La quantità di calore scambiata è funzione crescente della superficie totale del blocco, pertanto lo scambio di calore è minimo quando è minima la superficie.

Indicati con

b la misura del lato di base in dm

h la misura dell'altezza in dm

V la misura del volume in dm^3

S la misura della superficie totale in dm^2

si ha $$V = b^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{V}{b^2}$$

$$S = 2b^2 + 4b\frac{V}{b^2} = 2b^2 + 4\frac{V}{b}$$

Pertanto

$$\boldsymbol{S(b) = 2b^2 + \frac{40}{b} = \frac{2b^3 + 40}{b} \quad con\ \ b > 0}$$

Studio della funzione

S(b) è positiva , continua e derivabile nell'intervallo di definizione $b > 0$

Poiché $\lim_{b \to 0^+} S(b) = +\infty$ l'asse delle ordinate è asintoto verticale

Poiché $\lim_{b \to +\infty} 2b^2 = +\infty$ mentre l'addendo $\frac{40}{b}$ è infinitesimo al tendere di b a $+\infty$ possiamo affermare che $\lim_{b \to +\infty} S(b) = +\infty$ e che il suo grafico si avvicina asintoticamente a quello della funzione $2b^2$ che ha andamento parabolico.

Studio del segno della derivata prima

$$S'(b) = 4b - \frac{40}{b^2} = \frac{4b^3 - 40}{b^2} \geq 0 \quad se \quad b \geq \sqrt[3]{10} \cong 2{,}15$$

Monotonia di $S(b)$

Risulta inoltre $S(\sqrt[3]{10} = \frac{60}{\sqrt[3]{10}} \cong 27{,}85$

Studio del segno della derivata seconda

$S''(b) = 4 + \frac{80}{b^3} > 0 \quad \forall\, b > 0$

$S(b)$ è una funzione convessa nel suo insieme di definizione

Grafico (Figura1)

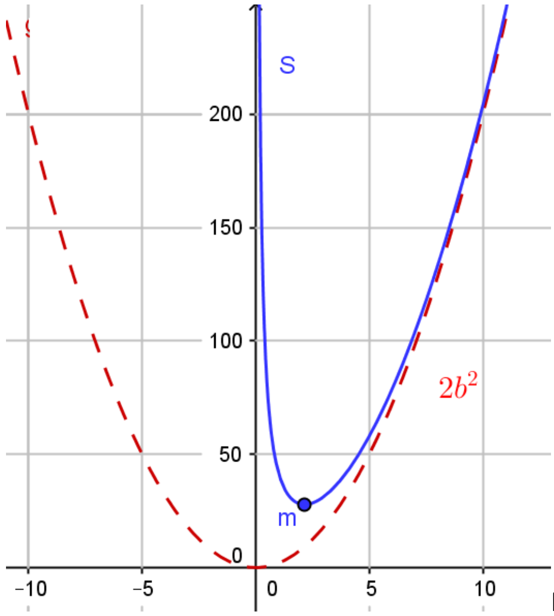

Figura1

2. Il punto $m\left(\sqrt[3]{10}; \frac{60}{\sqrt[3]{10}}\right)$ è punto di minimo relativo e assoluto.

Il prisma quadrangolare di superficie minima deve avere pertanto il lato di base di circa 2,15 dm.

La misura dell'altezza sarà uguale a $\frac{V}{b^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{100}} = \sqrt[3]{10}\ dm$ quindi uguale alla misura del lato di base.

Il prisma retto si riduce a un cubo.

3. Per la scelta della funzione, tra quelle proposte, è necessario ricordare alcune proprietà caratteristiche del processo di riscaldamento.

Se tra due corpi a temperatura diversa avviene uno scambio di calore ; se dopo un certo tempo si osserva il fenomeno dell'adeguamento termico, cioè i due corpi arrivano ad una comune temperatura di equilibrio, la temperatura finale è più vicina a quella che aveva inizialmente il corpo di maggiore capacità termica.

Se lo scambio di calore avviene tra un corpo l'ambiente circostante , di capacità termica molto maggiore, la temperatura finale coincide con quella dell'ambiente

Nel nostro caso il blocco di ghiaccio si riscalda ricevendo calore dall'ambiente esterno, che si trova a temperatura $T_a = 10\ °C$ ma, raggiunta la temperatura di fusione (0°C in condizioni normali), la temperatura rimane costante durante tutto il processo di fusione, per poi aumentare secondo le caratteristiche termiche dello stato liquido.

Poiché nessuna delle funzioni proposte dal testo può rappresentare, pertanto, il processo completo (riscaldamento del ghiaccio, fusione, riscaldamento dell'acqua) , analizziamo le tre funzioni proposte aggiungendo la condizione $T \leq 0$

Le funzioni sono

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a$$

Deve essere scelta la seconda poiché è l'unica che soddisfa la condizione iniziale $T(0) = T_g$

Sostituendo i valori noti si ottiene

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g \rightarrow 28(1 - e^{-kt}) - 18 \rightarrow 10 - 28\,e^{-kt}$$

Determiniamo il dominio imponendo $T \leq 0$

Imponendo $10 - 28\,e^{-kt} \leq 0$ si trova

$e^{-kt} \geq \frac{5}{14} \rightarrow -kt \geq \ln\frac{5}{14} \rightarrow t \leq \frac{1}{k}\ln\frac{14}{5} \cong \frac{1{,}03}{k}$

La funzione che può modellizzare il processo di riscaldamento prima della fusione è

$$\begin{cases} \boldsymbol{T(t) = 10 - 28\,e^{-kt}} \\ \boldsymbol{0 < t \leq \frac{1}{k}\ln\frac{14}{5}} \end{cases}$$

Osserviamo se sono verificate alcune caratteristiche delle curve che modellizzano il riscaldamento

- *la temperatura cresce in funzione del tempo*
- *la velocità di crescita diminuisce*
- *la funzione, prolungata nell'intervallo $t \geq 0$, tende asintoticamente alla temperatura dell'ambiente*

La derivata prima è uguale a $T'(t) = 28ke^{-kt}$.

Se k <0 $T'(t) < 0 \quad \forall t$

Se k =0 $T'(t) = 0 \quad \forall t$

Se k >0 $T'(t) > 0 \quad \forall t$

La derivata seconda è uguale a $T''(t) = -28k^2e^{-kt}$ ed è negativa, qualunque sia il valore di k, non nullo, e per ogni valore di t di conseguenza, $T'(t)$ è decrescente.

Soluzione di Adriana Lanza

Assegnando a k valori positivi, la funzione $T(t)$ è sempre crescente mentre la velocità di crescita diminuisce nel tempo.

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 10$$

e quindi la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta $T = 10$.

Quest'ultimo risultato non dipende dal valore di k, purché positivo, quindi ci aspettiamo che,ultimato il processo di fusione, la massa di acqua si riscaldi fino a raggiungere la temperatura dell'ambiente

Nella Figura 2 sono messi a confronto i grafici delle funzioni che corrispondono, rispettivamente, ai valori $k = 1$, $k = 0{,}5$, k=0,2.

Si osserva che al diminuire di k, positivo, il blocco di ghiaccio resta più a lungo nello stato solido.

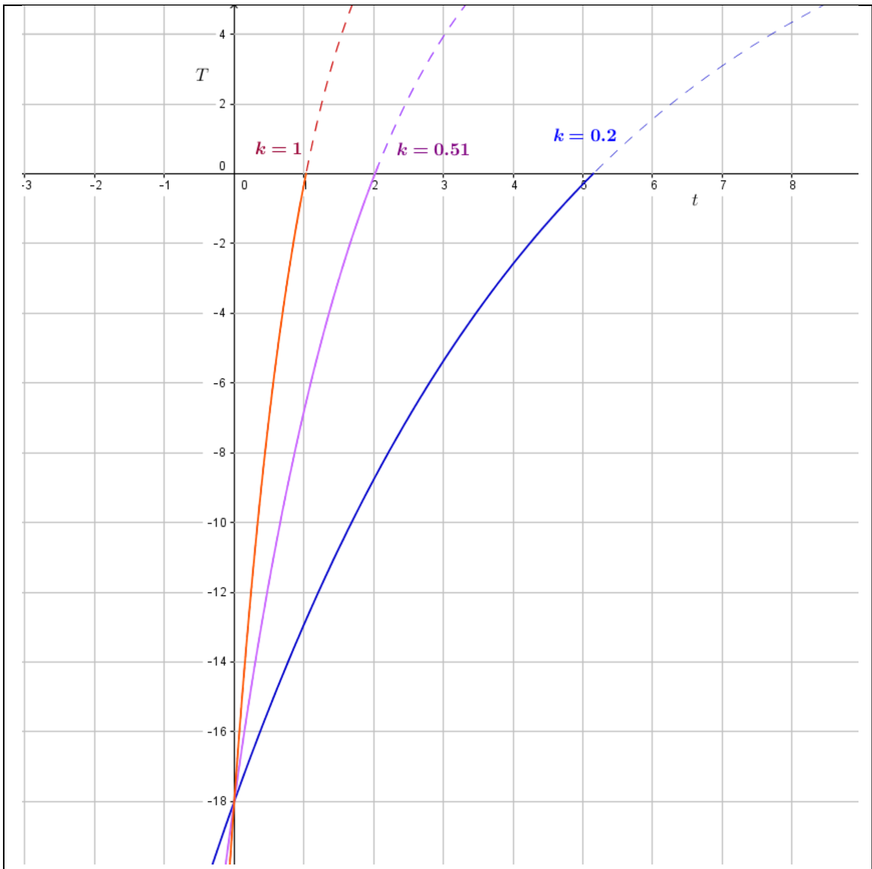

Figura2

Il blocco di ghiaccio non inizierà a fondere entro 2 minuti se $T(2) < 0$, ovvero se la curva di riscaldamento si arresta per $t > 2$
Poichè, come è stato osservato , il grafico della funzione T(t) incontra l'asse delle ascisse nel punto di ascissa $\frac{1}{k}\ln\frac{14}{5} \cong \frac{1{,}03}{k}$, con k>0,

deve risultare

$$\frac{1}{k}\ln\frac{14}{5} > 2 \rightarrow$$
$$0 < k < \frac{1}{2}\ln\frac{14}{5} \cong 0{,}51$$

4. Il volume di un tronco di cono di altezza h, raggio minore r e raggio maggiore R è uguale a

$\frac{1}{3}h\pi(R^2 + r^2 + Rr)$

Il volume V del recipiente è, pertanto, $\left(\frac{1}{3}2\pi(1{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5) = \frac{19}{6}\pi\right) \cong 9{,}95 dm^3$

In figura 3 è rappresentato il contenitore, che è stato immaginato come un comune <<secchio>> e quindi poggiato sulla base minore, anche se il testo non lo specifica.
Soluzione di Adriana Lanza

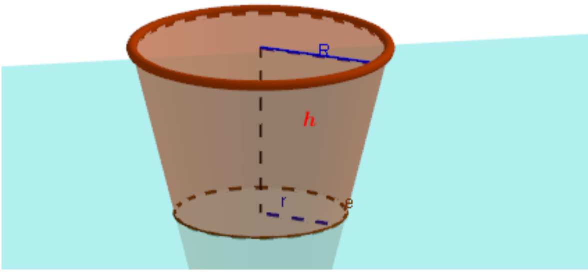

Figura 3

Per ottenere 10 dm^3 si deve utilizzare un volume V_o di acqua tale che

$$\boldsymbol{V_o + 0,0905\, V_o = 10 dm^3 \rightarrow V_o = \frac{10}{1{,}0905} \cong 9,17\ dm^3}$$

inferiore, quindi, alla capacità del recipiente

Il livello $h_1$dell'acqua, corrispondente, è l'altezza di un tronco di cono avente $r = 1\ dm.$

Entrambi i tronchi appartengono al cono K di vertice V e raggio di base uguale a R

Indichiamo con K_1 il cono di vertice V e raggio di base uguale a r(Figura 4)

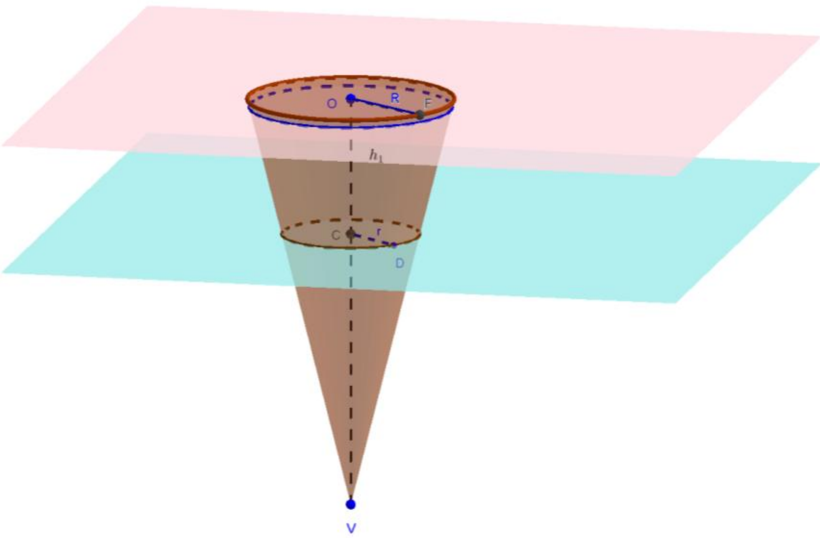

Figura4

Per determinare l'altezza $\overline{VC}$ di K_1 , osserviamo che i due triangoli VOF e VCD sono tra loro simili, pertanto

$$\frac{\overline{VO}}{\overline{VC}} = \frac{R}{r} \rightarrow \frac{\overline{VO}-\overline{VC}}{\overline{VC}} = \frac{R-r}{r} \rightarrow$$

$$\frac{2}{\overline{VC}} = \frac{0{,}5}{1} \rightarrow \boldsymbol{\overline{VC} = 4\ dm} \rightarrow \overline{VO} = 6\ dm$$

Il volume del cono K_1 è quindi uguale a $\frac{4}{3}\pi 1^2 \cong 4{,}19 dm^3$

Soluzione di Adriana Lanza

I due coni K e K_1 sono entrambi simili al cono K_2 di vertice V e altezza $h_1 + 4$, il cui volume è uguale a

$$(4{,}19 + 9{,}17)dm^3 \cong 13{,}36\ dm^3$$

Poiché il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto delle rispettive altezze

$$\frac{13{,}36}{4{,}19} = \left(\frac{h_1+4}{4}\right)^3 \rightarrow h_1 + 4 = 4\sqrt[3]{\frac{13{,}36}{4{,}19}} \cong 5{,}89$$

Pertanto $\boldsymbol{h_1} \cong \mathbf{(5{,}89 - 4 = 1{,}89)}\ \boldsymbol{dm}$