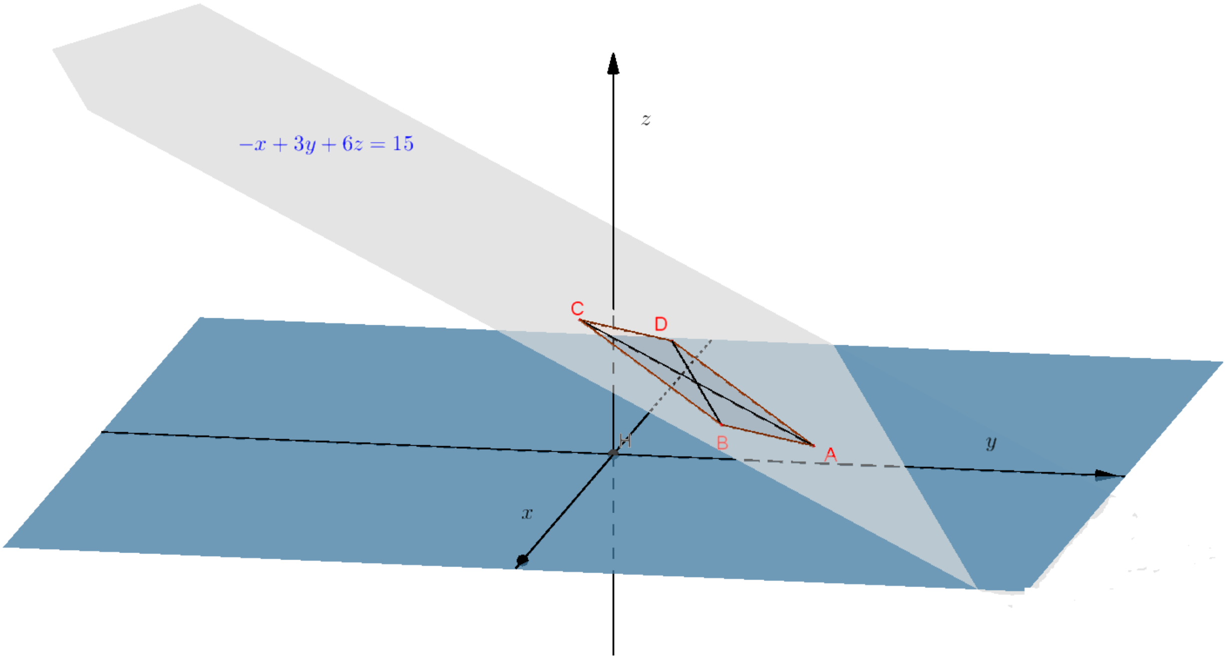
6. I punti $A(3;4;1)$ $B(6;3;2)$ $C(3;0;3)$ $D(0;1;2)$ sono vertici di un quadrilatero ABCD. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

Soluzione



Condizione sufficiente affinché ABCD sia un parallelogramma è che la retta AB sia parallela alla retta CD e che la retta BC sia parallela alla retta AD.

I quattro punti risultano, in tal caso, necessariamente complanari.

Determiniamo i parametri direttori della rette AB e CD

$x_B - x_A = 3$ $x_D - x_C = -3$

$y_B - y_A = -1$ $y_D - y_C = 1$

$z_B - z_A = 1$ $z - z_C = -1$

Poichè le due terne sono proporzionali, le due rette sono tra loro parallele

Determiniamo i parametri direttori della rette BC e AD

$x_B - x_C = 3$ $x_D - x_A = -3$

$y_B - y_C = 3$ $y_D - y_A = -3$

$z_B - z_C = -1$ $z - z_A = 1$

Poiché le due terne sono proporzionali, le due rette sono tra loro parallele

Il quadrilatero è un parallelogramma

Per verificare se si tratta di un rettangolo calcoliamo il prodotto scalare dei due vettori aventi per componenti i parametri direttori di due lati consecutivi

$$3 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 5 \neq 0$$

I due vettori non sono ortogonali in quanto il loro prodotto scalare non è nullo.

Il quadrilatero, quindi, è un parallelogramma ma non è un rettangolo

Come metodo alternativo si può verificare che le due diagonali non hanno uguale lunghezza

$$\overline{AC} = \sqrt{20} \qquad \overline{BD} = \sqrt{40}$$

Equazione del piano ABCD (non richiesta)

Il vettore normale al piano ABCD deve essere perpendicolare ai lati del parallelogramma.

Se (a, b, c) *sono le sue componenti , devono essere verificate le relazioni* $\begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ 3a + 3b - c = 0 \end{cases}$

Una possibile terna è pertanto $(-1,3,6)$

Il piano ABCD appartiene al fascio $-x + 3y + 6z = d$ *dove d si determina imponendo il passaggio, per esempio, per il punto* $D(0;1;2)$

$$3 + 12 = 15 = d$$

$-x + 3y + 6z = 15$