2. Data la funzione così definita in R:

$$f(x) = xe^{-|x^3-1|}$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti

Soluzione

La funzione è definita mediante due rami di funzioni continue e derivabili

f(x)= $\begin{cases} xe^{(x^3-1)} & x \leq 1 \\ xe^{(1-x^3)} & x > 1 \end{cases}$

Ammette uno zero nell'origine degli assi, assume valori negativi per x<0, positivi per x>0

La funzione è continua in R essendo

$$\lim_{x\to 1^-} xe^{(x^3-1)} = \lim_{x\to 1^+} xe^{(1-x^3)} = 1$$

mentre non è derivabile nel punto (1;1)

Infatti , essendo

$$f'(x) = \begin{cases} e^{(x^3-1)}(1+3x^3) & x < 1 \\ e^{(1-x^3)}(1-3x^3) & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{(x^3-1)}(1+3x^3) = 4 \qquad \lim_{\Delta x\to 1^+} e^{(1-x^3)}(1-3x^3) = -2$$

la derivata sinistra non coincide con la derivata destra

Poiché

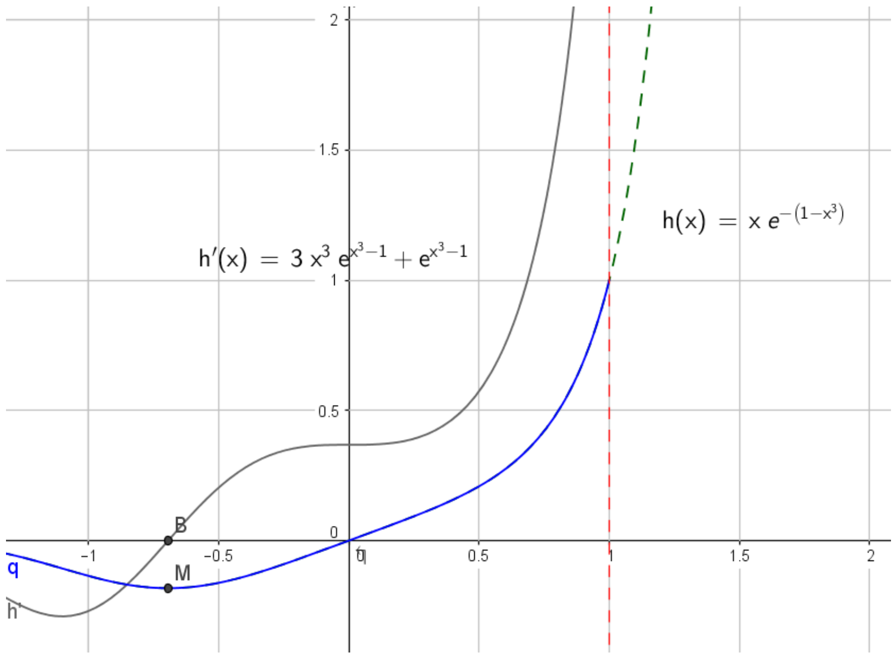
$$\lim_{x\to -\infty} xe^{(x^3-1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{(1-x^3)}} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} xe^{(1-x^3)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{(x^3-1)}} = 0$$

la funzione ammette l'asse x come asintoto orizzontale

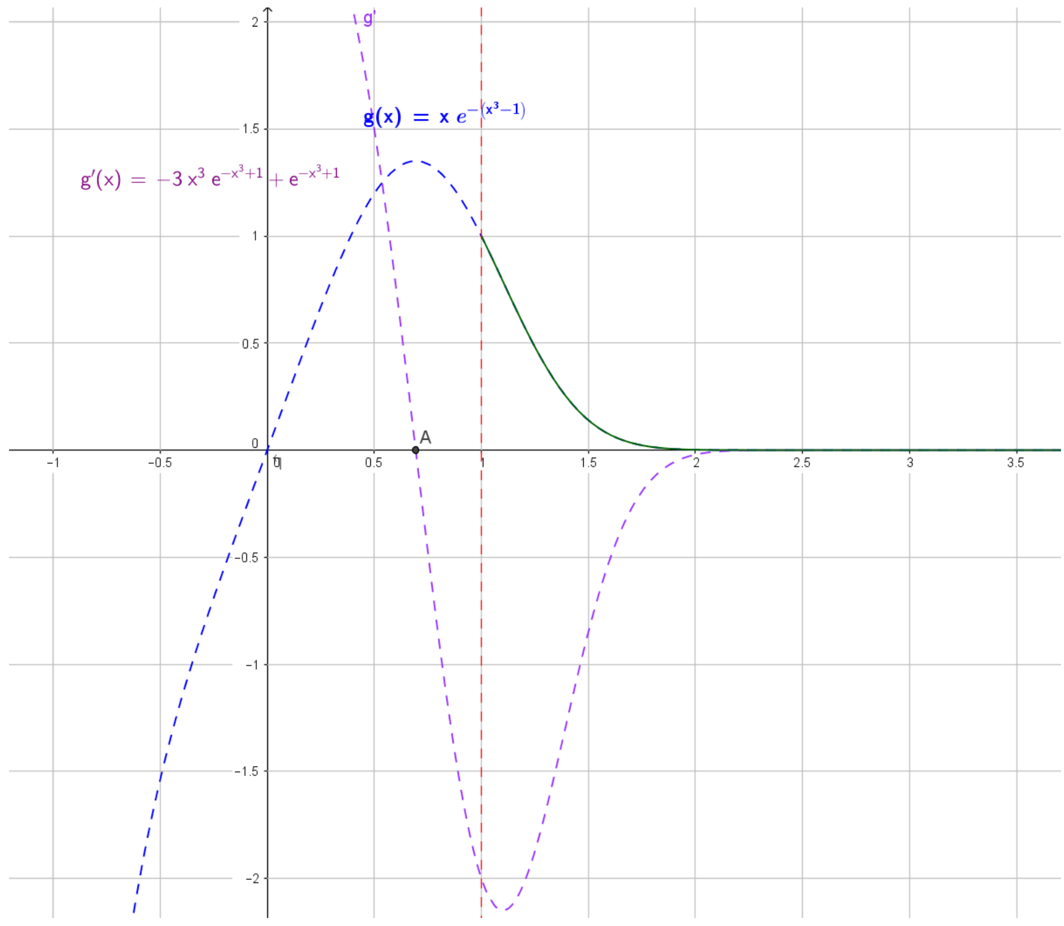
Studio della monotonia

Nell'intervallo $x < 1$ la derivata ammette uno zero per $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, è negativa a sinistra dello zero, è positiva a destra

Quesito 2   Suppletiva 2016   Soluzione di Adriana Lanza



Nell'intervallo $x > 1$ la derivata è sempre negativa



		$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$		1	
f(x)	↘		↗		↘

Il punto $M\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,;-\frac{1}{\sqrt[3]{3e^4}}\right)$ è punto di minimo relativo e assoluto

Il punto $M'(1\,;1)$ è punto di massimo relativo (punto angoloso) e assoluto