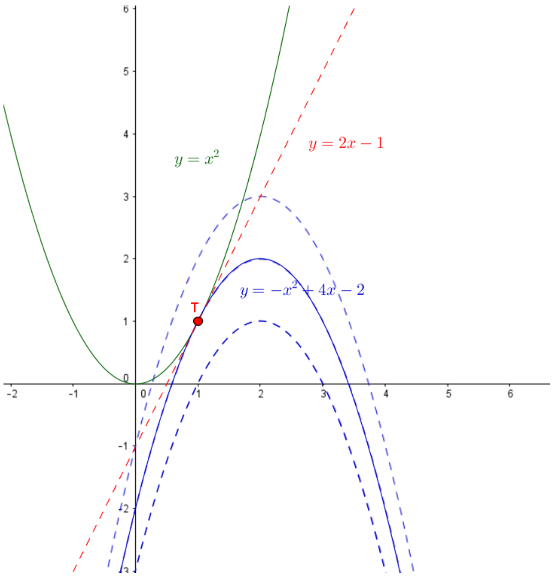
Soluzione di Adriana Lanza

Quesito 3

Determinare il parametro reale a affinché i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$ risultino tra loro tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.



Soluzione

Primo metodo

Sia $T(x_0; y_0)$ un punto appartenente ad entrambe le parabole.

Affinché le due curve abbiano in T la stessa tangente è sufficiente che siano uguali le derivate delle due funzioni , calcolate in x_0

Devono , cioè, essere soddisfatte le due condizioni seguenti

$$\begin{cases} {x_0}^2 = -{x_0}^2 + 4x_0 - a \\ 2x_0 = -2x_0 + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Il punto di tangenza è $T(1;1)$

Secondo metodo

Il problema può essere risolto anche per via elementare imponendo analiticamente che le due parabole abbiano in comune due punti reali e coincidenti

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x - a \end{cases} \rightarrow 2x^2 - 4x + a = 0$$

Affinché le soluzioni siano reali e coincidenti il discriminante deve essere nullo

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 4 - 2a = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow 2(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$$

Il punto di tangenza è $T(1;1)$