Soluzione di Adriana Lanza

Quesito 9.

Dati i punti $A(-2,0,1)$ $B(1,1,2)$ $C(0,-1,-2)$ $D(1,1,0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A,B,C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

Soluzione

Dato un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, i parametri a, b, c sono le componenti di un vettore $\vec{n}$ ad esso perpendicolare.

Considerati i due vettori

$\overrightarrow{AB} = (3,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-3)$ le cui direzioni sono parallele ad α, determiniamo a,b e c in modo che $\vec{n}$ sia perpendicolare a entrambi:

$$\begin{cases} 3a + b + c = & 0 \\ 2a - b - 3c = & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a - 2c = & 0 \\ 2a - 3c = & b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = & \dfrac{2}{5}c \\ b = & -\dfrac{11}{5}c \end{cases}$$

Il sistema fornisce infinite soluzioni corrispondenti a terne tra di loro proporzionali che quindi rappresentano vettori tra loro paralleli.

Scegliendo la terna $(2,-11,5)$ l'equazione del piano α sarà $2x - 11y + 5z + d = 0$, dove il parametro d deve essere determinato imponendo il passaggio per uno dei tre punti assegnati, per esempio il punto C:

$$11 - 10 + d = 0 \rightarrow d = -1$$

L'equazione del piano α sarà $2x - 11y + 5z - 1 = 0$

La retta passante per D e perpendicolare al piano α ha la direzione del vettore $\vec{n}$, possiamo quindi scrivere le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = & 1 + 2t \\ y = & 1 - 11t \\ z = & 5t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si trovano le equazioni canoniche

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-11} = \frac{z}{5}$$