

Quesito. 1

1. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\ln(\cos^2(x))}$$

Soluzione

Il limite si presenta come una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$

Con il cambiamento di variabile $\cos x - 1 = t$ diventa:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\ln(1+t)^2}$$

che è ancora una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$ ma può essere eliminata sfruttando i limiti notevoli.

Dividendo per t sia il numeratore che il denominatore, si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\ln(1+t)^2}{t}}$$

Poiché

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = 2 \ln e = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - 1)}{\ln(\cos^2 x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\ln(1+t)^2}{t}} = \frac{1}{2}$$

OSSERVAZIONE

E' lecito sostituire $\ln(1+t)^2$ con $2 \ln(1+t)$ in quanto le due funzioni coincidono per $t > -1$ e quindi in un intorno di sufficientemente piccolo di $t = 0$.