Quesito 2.

In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia , la probabilità raddoppia?

Soluzione

La variabile aleatoria X, che conta il numero di passeggeri senza biglietto in un gruppo di 40, ha distribuzione binomiale

$$P(X=k) = C_{n,k}\, p^k q^{n-k}$$

dove $n = 40$ $p = 0{,}04$ $q = 1 - p = 0{,}96$

L'evento E$\{almeno\ un\ passeggero\ è\ senza\ biglietto\}$ è l'evento contrario di $\bar{E}\{nessun\ passeggero$ è $senza\ biglietto\ \}$ corrispondente al valore X=0

$$P(\bar{E}) = C_{n,0}\, p^0 q^n = q^n = 0{,}96^{40}$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) \cong 80\%$$

Se si approssima la binomiale con una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = np = 1{,}6$ si ottiene

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(\bar{E}) = P_0 = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-1{,}6} \cong 0{,}20 \to P(E) = 1 - P(\bar{E}) \cong 80\%$$

Se la probabilità raddoppiasse ,raddoppiando il numero dei passeggeri , assumerebbe un valore maggiore di 1 e questo è assurdo, per definizione di probabilità.

La probabilità dell'evento E cresce al crescere di n ma non c'è relazione di proporzionalità diretta . Se n =80 si ottiene

$$P(E) = 1 - 0{,}96^{80} \cong 96\%$$